Klausur zur Höheren Mathematik 1/2

für **Ingenieurstudiengänge**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 7** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 8 – 11** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab 4.4.2016 über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

VIEL ERFOLG!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **11.4.2016** bis **13.4.2016** einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*5 Punkte*) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. Falls die untersuchte Reihe nicht konvergiert, begründen Sie dies.

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{2^{n-1}}$

(b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(\frac{n}{n+1})}{\ln(n+1)\,\ln(n)}$

Aufgabe 2 (*6 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Ableitung von f für $x \neq 0$.

(b) Bestimmen Sie mittels Differenzenquotient die Ableitung von f an der Stelle $x = 0$.

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Zeichnen Sie die Lösungen der Gleichung

$$w^3 = -8\,\mathrm{i}$$

in die komplexe Zahlenebene ein.

Aufgabe 4 (*9 Punkte*) Gegeben sei die Quadrik

$$\mathcal{Q} = \left\{ (x_1, x_2, x_3)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_3 = 0 \right\} .$$

(a) Bestimmen Sie ein Koordinatensystem, in dem $\mathcal{Q}$ euklidische Normalform hat. Geben Sie die Normalform und die Gestalt der Quadrik an.

(b) In Standardkoordinaten sei die Ebene $E_1\colon x_1 = 0$ gegeben. Bestimmen Sie eine euklidische Normalform des Schnitts von $\mathcal{Q}$ mit dieser Ebene.

(c) In Standardkoordinaten sei die Ebene $E_2\colon x_2 = 0$ gegeben. Bestimmen Sie eine euklidische Normalform des Schnitts von $\mathcal{Q}$ mit dieser Ebene. Zeichnen Sie den Schnitt von $\mathcal{Q}$ mit E_2 in ein ebenes Koordinatensystem ein.

Aufgabe 5 (*3 Punkte*)

Gegeben sei die Abbildung

$$f\colon \mathbb{C} \setminus \{7\} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto \frac{1}{z-7} .$$

Untersuchen Sie f auf Injektivität und Surjektivität.

Aufgabe 6 (*8 Punkte*)

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int \frac{3x^2+7x+2}{(x+1)^2x}\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{1}{x^2}\sin(1/x)\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int x^3\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe 7 (*6 Punkte*)

Gegeben sei für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ das Vektorfeld

$$g_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \alpha\mathrm{e}^{x_1+x_2}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{x_1+x_2}\begin{pmatrix} x_1x_2 \\ x_1x_2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das Vektorfeld g_α ein Potential hat, und geben Sie für diese α ein Potential an.

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe 8 (*4 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f:(0,+\infty)^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y)^{\intercal} \mapsto x^y\,\mathrm{e}^{2\,x}.$$

Bestimmen Sie den Gradienten von f und das Taylorpolynom 1. Stufe zum Entwicklungspunkt $(1,1)$.

(a) $\operatorname{grad} f(x,y) =$

(b) $T_1\left(f,(x,y),(1,1)\right) =$

Aufgabe 9 (*4 Punkte*)

Geben Sie für die folgenden Potenzreihen den Mittelpunkt $z_0 \in \mathbb{R}$ und den Radius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ ihres Konvergenzkreises an:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n\,2^n}}{(n+1)^6}\,z^n$ $\quad z_0 =$ $\quad \rho =$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (3\,z)^{2n}$ $\quad z_0 =$ $\quad \rho =$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-7)^n}{n!}$ $\quad z_0 =$ $\quad \rho =$

Aufgabe 10 (*4 Punkte*) In der Ebene $\mathbb{R}^2$ sei g die Gerade mit der Gleichung $x_2 = 2x_1$ und σ die Spiegelung an dieser Geraden. Wir betrachten die Basis $B\colon b_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ und die Standardbasis E.

Berechnen Sie:

${}_B\sigma\,(b_1) =$ $\qquad {}_B\sigma_B =$

${}_E\sigma\,(b_1) =$ $\qquad {}_E\sigma_E =$

Aufgabe 11 (*8 Punkte*) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Rang von A.

(b) A hat den Eigenwert 0. Berechen Sie dessen geometrische Vielfachheit.

(c) Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von A. Bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert.

(d) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix T so, dass $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist.

$T =$

(e) Bestimmen Sie die Eigenwerte und jeweils einen zugehörigen Eigenvektor der Matrix B.

Eigenwert	Eigenvektor