# Klausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

**Aufgabe 1.** *Bitte füllen Sie folgendes aus! (1 Punkt)*

| | |
|---|---|
| Name: Musterlösung | Matrikelnummer: Musterlösung |
| Vorname: Musterlösung | Studiengang: Musterlösung |

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; bearbeiten Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

VIEL ERFOLG!

---

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Gesamt |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | /1 | /12 | /11 | /14 | /11 | /12 | /13 | /74 |

*Erläuterung:* Zur Nacharbeit dieser Klausur sind die Antworten ausgiebig erläutert. Ergebnisse und Rechnungen sind ausführlicher dargestellt, als in der Prüfung verlangt war. Möge es nützen!

Tipp für zukünftige Leser: Ihre Vorlesung und die wöchentlichen Übungen erklären Ihnen diese wunderbaren Rechentechniken. Gehen Sie hin, arbeiten Sie kontinuierlich mit, es lohnt sich!

---

## Nützliche Werte

Tabelle der Exponentialfunktion $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ für ausgewählte Werte von $x$:

| $x$ | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.4 | 1.5 | 1.6 | 1.7 | 1.8 | 1.9 | 2.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e^x$ | 1.11 | 1.22 | 1.35 | 1.49 | 1.65 | 1.82 | 2.01 | 2.23 | 2.46 | 2.72 | 3.00 | 3.32 | 3.67 | 4.06 | 4.48 | 4.95 | 5.47 | 6.05 | 6.69 | 7.39 |
| $e^{-x}$ | .905 | .819 | .741 | .670 | .607 | .549 | .497 | .449 | .407 | .368 | .333 | .301 | .273 | .247 | .223 | .202 | .183 | .165 | .150 | .135 |

Tabelle für das Integral $\int_0^x \varphi(t)\,dt$ über die Normalverteilung $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$:

| | $x$+0.00 | $x$+0.01 | $x$+0.02 | $x$+0.03 | $x$+0.04 | $x$+0.05 | $x$+0.06 | $x$+0.07 | $x$+0.08 | $x$+0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x = 0.0$ | 0.00000 | 0.00399 | 0.00798 | 0.01197 | 0.01595 | 0.01994 | 0.02392 | 0.02790 | 0.03188 | 0.03586 |
| 0.1 | 0.03983 | 0.04380 | 0.04776 | 0.05172 | 0.05567 | 0.05962 | 0.06356 | 0.06749 | 0.07142 | 0.07535 |
| 0.2 | 0.07926 | 0.08317 | 0.08706 | 0.09095 | 0.09483 | 0.09871 | 0.10257 | 0.10642 | 0.11026 | 0.11409 |
| 0.3 | 0.11791 | 0.12172 | 0.12552 | 0.12930 | 0.13307 | 0.13683 | 0.14058 | 0.14431 | 0.14803 | 0.15173 |
| 0.4 | 0.15542 | 0.15910 | 0.16276 | 0.16640 | 0.17003 | 0.17364 | 0.17724 | 0.18082 | 0.18439 | 0.18793 |
| 0.5 | 0.19146 | 0.19497 | 0.19847 | 0.20194 | 0.20540 | 0.20884 | 0.21226 | 0.21566 | 0.21904 | 0.22240 |
| 0.6 | 0.22575 | 0.22907 | 0.23237 | 0.23565 | 0.23891 | 0.24215 | 0.24537 | 0.24857 | 0.25175 | 0.25490 |
| 0.7 | 0.25804 | 0.26115 | 0.26424 | 0.26730 | 0.27035 | 0.27337 | 0.27637 | 0.27935 | 0.28230 | 0.28524 |
| 0.8 | 0.28814 | 0.29103 | 0.29389 | 0.29673 | 0.29955 | 0.30234 | 0.30511 | 0.30785 | 0.31057 | 0.31327 |
| 0.9 | 0.31594 | 0.31859 | 0.32121 | 0.32381 | 0.32639 | 0.32894 | 0.33147 | 0.33398 | 0.33646 | 0.33891 |
| 1.0 | 0.34134 | 0.34375 | 0.34614 | 0.34849 | 0.35083 | 0.35314 | 0.35543 | 0.35769 | 0.35993 | 0.36214 |
| 1.1 | 0.36433 | 0.36650 | 0.36864 | 0.37076 | 0.37286 | 0.37493 | 0.37698 | 0.37900 | 0.38100 | 0.38298 |
| 1.2 | 0.38493 | 0.38686 | 0.38877 | 0.39065 | 0.39251 | 0.39435 | 0.39617 | 0.39796 | 0.39973 | 0.40147 |
| 1.3 | 0.40320 | 0.40490 | 0.40658 | 0.40824 | 0.40988 | 0.41149 | 0.41308 | 0.41466 | 0.41621 | 0.41774 |
| 1.4 | 0.41924 | 0.42073 | 0.42220 | 0.42364 | 0.42507 | 0.42647 | 0.42785 | 0.42922 | 0.43056 | 0.43189 |
| 1.5 | 0.43319 | 0.43448 | 0.43574 | 0.43699 | 0.43822 | 0.43943 | 0.44062 | 0.44179 | 0.44295 | 0.44408 |
| 1.6 | 0.44520 | 0.44630 | 0.44738 | 0.44845 | 0.44950 | 0.45053 | 0.45154 | 0.45254 | 0.45352 | 0.45449 |
| 1.7 | 0.45543 | 0.45637 | 0.45728 | 0.45818 | 0.45907 | 0.45994 | 0.46080 | 0.46164 | 0.46246 | 0.46327 |
| 1.8 | 0.46407 | 0.46485 | 0.46562 | 0.46638 | 0.46712 | 0.46784 | 0.46856 | 0.46926 | 0.46995 | 0.47062 |
| 1.9 | 0.47128 | 0.47193 | 0.47257 | 0.47320 | 0.47381 | 0.47441 | 0.47500 | 0.47558 | 0.47615 | 0.47670 |
| 2.0 | 0.47725 | 0.47778 | 0.47831 | 0.47882 | 0.47932 | 0.47982 | 0.48030 | 0.48077 | 0.48124 | 0.48169 |
| 2.1 | 0.48214 | 0.48257 | 0.48300 | 0.48341 | 0.48382 | 0.48422 | 0.48461 | 0.48500 | 0.48537 | 0.48574 |
| 2.2 | 0.48610 | 0.48645 | 0.48679 | 0.48713 | 0.48745 | 0.48778 | 0.48809 | 0.48840 | 0.48870 | 0.48899 |
| 2.3 | 0.48928 | 0.48956 | 0.48983 | 0.49010 | 0.49036 | 0.49061 | 0.49086 | 0.49111 | 0.49134 | 0.49158 |
| 2.4 | 0.49180 | 0.49202 | 0.49224 | 0.49245 | 0.49266 | 0.49286 | 0.49305 | 0.49324 | 0.49343 | 0.49361 |
| 2.5 | 0.49379 | 0.49396 | 0.49413 | 0.49430 | 0.49446 | 0.49461 | 0.49477 | 0.49492 | 0.49506 | 0.49520 |
| 2.6 | 0.49534 | 0.49547 | 0.49560 | 0.49573 | 0.49585 | 0.49598 | 0.49609 | 0.49621 | 0.49632 | 0.49643 |
| 2.7 | 0.49653 | 0.49664 | 0.49674 | 0.49683 | 0.49693 | 0.49702 | 0.49711 | 0.49720 | 0.49728 | 0.49736 |
| 2.8 | 0.49744 | 0.49752 | 0.49760 | 0.49767 | 0.49774 | 0.49781 | 0.49788 | 0.49795 | 0.49801 | 0.49807 |
| 2.9 | 0.49813 | 0.49819 | 0.49825 | 0.49831 | 0.49836 | 0.49841 | 0.49846 | 0.49851 | 0.49856 | 0.49861 |
| 3.0 | 0.49865 | 0.49869 | 0.49874 | 0.49878 | 0.49882 | 0.49886 | 0.49889 | 0.49893 | 0.49896 | 0.49900 |

Ablesebeispiele: Für $x = 1.23$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,dt \approx 0.39065$. Für $x = 2.58$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,dt \approx 0.49506$.

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.

**Aufgabe 2.** *Verständnisfragen (2+2+2+2+2+2 = 12 Punkte)*

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegenbeispiels).

**2A.** Sei $f:\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig und monoton fallend mit $f(x) \searrow 0$ für $x \to \infty$.
Ist die Funktion $f$ dann (absolut) integrierbar, also $\int_{x=0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$?

*Begründete Antwort:*

Nein. Ein einfaches und typisches **Gegenbeispiel** ist $f(x) = 1/(x+1)$.

*Erläuterung:* Die genannte Funktion $f:\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist stetig und fällt monoton gegen Null, aber dennoch gilt $\int_{x=0}^{r} 1/(x+1)\,\mathrm{d}x = \ln(r+1) \to \infty$ für $r \to \infty$. Machen Sie eine Skizze! Sie kennen das analoge Beispiel zu Reihen: Für $k \to \infty$ gilt $1/k \searrow 0$ aber $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k = \infty$. Für obige Frage ist $f(x) = 1/x$ nicht direkt geeignet, da in $x = 0$ ein Pol vorliegt.

— 2

**2B.** Wir integrieren $f(z) = \cos(3z)/z^3$ entlang des positiv orientierten Randes $\partial R$ eines Rechtecks $R \subset \mathbb{C}$ mit $0 \notin \partial R$. Welche Werte kann das komplexe Wegintegral $\int_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z$ annehmen?

*Begründete Antwort:*

Das **Residuum** der holomorphen Funktion $f(z) = z^{-3} - \frac{3^2}{2!}z^{-1} + \frac{3^4}{4!}z^1 \mp \dots$ in der einzigen Polstelle $z = 0$ ist hier $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = -9/2$. Dank **Residuensatz** gilt:

$$\int_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z \quad = \quad 2\pi\mathrm{i} \sum_{s \in \mathring{R}} \operatorname{res}_s(f) \quad = \quad \begin{cases} -9\pi\mathrm{i} & \text{für } 0 \in \mathring{R}, \\ 0 & \text{für } 0 \in \mathbb{C} \smallsetminus R. \end{cases}$$

*Erläuterung:* Der Residuensatz für holomorphe Funktionen vereinfacht viele Integrale! Die vorliegende Frage zielt auf ein besonders einfaches Beispiel.

— 2

**2C.** Wir betrachten die Differentialgleichung $u'(t) = \sqrt[3]{\cos(t)^2} \cdot \sin(u(t))$.
Gibt es Lösungen $u, v:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $u(0) < v(0)$ aber $u(1) > v(1)$?

*Begründete Antwort:*

Nein. Andernfalls wäre dank Zwischenwertsatz $u(t) = v(t)$ für mindestens ein $t \in [0,1]$, und dank Cauchys **Eindeutigkeitssatz** dann für alle $t \in \mathbb{R}$, also $u = v$.

*Erläuterung:* Mit $u, v$ ist auch die Differenz $h = u - v:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und erfüllt $h(0) < 0$ sowie $h(1) > 0$. Dank Zwischenwertsatz gilt $h(t) = 0$ für mindestens ein $t \in [0,1]$, also $u(t) = v(t)$. Warum ist eine Lösung $u:[a,b] \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $u' = f(t,u)$ zu gegebenem Startwert $u(t_0)$ mit $t_0 \in [a,b]$ eindeutig? Dank Cauchys Eindeutigkeitssatz genügt hierzu, dass $f(t,u)$ stetig differenzierbar ist nach $u$. Das ist hier erfüllt!

— 2

**2D.** Sei $U = \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{(x^2+y^2)(x^2+z^2)(y^2+z^2) = 0\}$ der Raum ohne die drei Koordinatenachsen. Hat jedes rotationsfreie Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^3$, $\operatorname{rot}(f) = 0$, ein Potential $F : U \to \mathbb{R}$?

*Begründete Antwort:*

Nein. Ein konkretes Gegenbeispiel ist das **Wirbelfeld** $f(x, y, z) = (-y, x, 0)/(x^2 + y^2)$.

*Erläuterung:* Die Bedingung $\operatorname{rot}(f) = 0$ ist notwendig für ein Potential, aber hinreichend erst für **einfach zusammenhängende** Gebiete. Das Gebiet $U$ ist nicht einfach zusammenhängend. Vermutlich hat demnach nicht jedes rotationsfreie Vektorfeld ein Potential. Wirklich überzeugend ist aber erst ein konkretes Gegenbeispiel, etwa wie angegeben das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters entlang der $z$–Achse. Auf ganz $U$ gilt $\operatorname{rot}(f) = 0$, aber dennoch gilt $\int_\gamma f(s) \bullet \mathrm{d}s$ entlang eines geschlossenen Weges um die $z$–Achse. Demnach ist $f$ zwar rotationsfrei, kann aber dennoch kein Potential auf $U$ haben. (Ebenso möglich ist in diesem Beispiel statt der $z$–Achse auch die $y$–Achse oder die $x$–Achse.)

$\overline{\phantom{0}}$ 2

**2E.** Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx)/\sqrt{k}$ stetig?

*Begründete Antwort:*

Nein, denn die Koeffizienten sind nicht **quadrat-summierbar**: $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k = \infty$.

*Erläuterung:* Jede absolut integrierbare Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ können wir in ihre Fourier–Reihe entwickeln, geschrieben $f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$.
Es gilt die **Energiegleichung**:

$$\int_{x=0}^{2\pi} \left|f(x)\right|^2 \mathrm{d}x \quad = \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|c_k\right|^2 \quad = \quad \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \left|a_k\right|^2 + \left|b_k\right|^2$$

Für jede stetige Funktion $f$ ist links das Integral endlich, also auch rechts die Reihe.
Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ divergiert, also kann unsere Funktion $f$ nicht stetig sein.
(Die Konvergenz der Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$ wurde ausführlich in HM2 und HM3 behandelt.)

$\overline{\phantom{0}}$ 2

**2F.** Gibt es Matrizen $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ mit einer Hauptvektorkette der Länge 5?

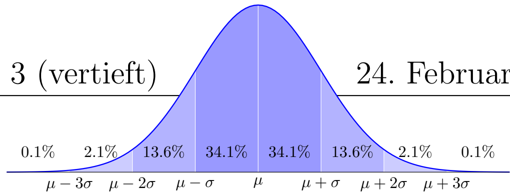
*Begründete Antwort:*

Ja, das typische **Beispiel** ist die Jordan–Matrix $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

*Erläuterung:* Das charakteristische Polynom ist hier $P_A(x) = \det(A - xE) = (\lambda - x)^5$. Der Eigenraum $\ker(A - \lambda E) = \mathbb{C}e_1$ ist nur eindimensional, insbesondere ist $A$ nicht diagonalisierbar. Hingegen gibt es hier die Hauptvektorkette $0 \xleftarrow{A-\lambda} e_1 \xleftarrow{A-\lambda} e_2 \xleftarrow{A-\lambda} \dots \xleftarrow{A-\lambda} e_5$.

Umgekehrt gilt: Ist $v_1, \dots, v_5 \in \mathbb{C}^5$ eine Hauptvektorkette zu einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$, so bilden diese Vektoren eine Basis des $\mathbb{C}^5$, und bezüglich dieser Basis stellt sich $A$ wir oben dar.

$\overline{\phantom{0}}$ 2




**Aufgabe 3.** *Wahrscheinlichkeitsrechnung (4+4+3 = 11 Punkte)*

**3A.** In der Produktion entstehen Teile der Güteklasse $A$ mit Wkt 10%, $B$ mit 50% und $C$ mit 40% (zufällig und unabhängig). Sie produzieren 10 000 Teile, davon sei $X$ die Anzahl der Teile der Güteklasse $A$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit $P$ können Sie 950 Teile der Güteklasse $A$ liefern? (Ergebnis in Prozent, gerundet auf den nächstgelegenen Prozentpunkt)

Erwartung $\mu(X) = 10\,000 \cdot 0.1 = 1000$

Streuung $\sigma(X) = \sqrt{10\,000 \cdot 0.1 \cdot 0.9} = \sqrt{900} = 30$

$P = \mathbf{P}(X \ge 950) \approx \int_{-1.683}^{\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ denn $\alpha = (950 - \mu - {}^1\!/\!_2)/\sigma = -1.68\overline{3}$.

$P \approx \int_0^{\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{1.683} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0.50 + 0.45 \approx 95\%$

*Erläuterung:* Exakt folgt $X$ der Binomialverteilung $B(10000, 0.1)$. Als Näherung nutzen wir die Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$. Den Wert des Integrals entnehmen wir der Tabelle, s. Seite 2. Die exakte Rechnung durch Summation ist mühsamer; sie ergibt den Wert $P = 0.95465\ldots$. 4

**3B.** Die Feststellung der Güteklasse ist aufwändig und teuer. Die Forschungsabteilung erprobt daher einen kostensparenden Schnelltest für die Güteklasse $A$. Teile der Klasse $A$ bestehen ihn mit Wkt 100%, Klasse $B$ mit 20%, Klasse $C$ mit 12.5% (zufällig und unabhängig). Mit welcher Wahrscheinlichkeit (in %) besteht ein zufällig aus der Produktion kommendes Teil diesen Test?

$\mathbf{P}(T) = \mathbf{P}(T \cap A) + \mathbf{P}(T \cap B) + \mathbf{P}(T \cap C)$ Disjunkte Zerlegung

$= \mathbf{P}(T|A)\,\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(T|B)\,\mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(T|C)\,\mathbf{P}(C)$ Formel der totalen Wkt

$= 1.0 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.5 + 0.125 \cdot 0.4 = 0.25 = 25\%$ Einsetzen und ausrechnen 2

Das Teil besteht den Test. Mit welcher Wahrscheinlichkeit (in %) ist es von Güteklasse $A$?

$\mathbf{P}(A|T) = \mathbf{P}(T \cap A)/\mathbf{P}(T)$ Bedingte Wahrscheinlichkeit

$= \mathbf{P}(T|A)\,\mathbf{P}(A)/\mathbf{P}(T)$ Formel von Bayes / Dreisatz

$= 0.1/0.25 = 0.40 = 40\%$ Einsetzen und ausrechnen 2

**3C.** Zur Weihnachtsfeier planen Sie folgende Tombola: Die 500 Mitarbeiter bekommen die Losnummern $\{1, 2, \dots, 500\}$. Es werden 25 zufällig gezogen – allerdings mit Zurücklegen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit $P$ wird mindestens ein Los zweimal gezogen? (Ergebnis in Prozent)

Exakt $$1 - P = \left(1 - \frac{0}{500}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{500}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{500}\right) \cdots \cdot \left(1 - \frac{24}{500}\right)$$

Näherung $$1 - P \lessapprox \exp\left(-\frac{25 \cdot 24}{2 \cdot 500}\right) = \exp\left(-\frac{300}{500}\right) \approx 0.55 = 55\%$$

Also $$P \gtrapprox 45\%$$

*Erläuterung:* Sie kennen Rechnung und Näherung vom Geburtstagsparadox oder allgemein von Kollisionswahrscheinlichkeiten. Die exakte Rechnung ergibt hier $1 - P = 0.543325\dots$. Die obige Rechnung ist also erwartungsgemäß recht gut. Die Richtung der Abweichung wird durch die Ungleichung richtig wiedergegeben; diese Feinheit war in der Klausur nicht gefragt. Wichtig war hier, nicht das Ergebnis mit seiner Gegenwahrscheinlichkeit zu verwechseln.

3

**Aufgabe 4.** *Differentialgleichungssysteme* (*4+4+3+3 = 14 Punkte*)

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem $y'(t) = A\,y(t)$ mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -8 & -4 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**4A.** Berechnen Sie die drei Bildvektoren $Av_1$, $Av_2$, $Av_3$ in $\mathbb{R}^3$ und schreiben Sie jeden als Linearkombination bezüglich der Basis $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$. Schreiben Sie die lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto Av$ als Matrix $B = {}_{\mathscr{B}}(A)_{\mathscr{B}}$ bezüglich der Basis $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$.

$$Av_1 = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} -2v_1 \\ +0v_2 \\ +0v_3 \end{cases} \quad \text{Eigenvektor!}}, \qquad Av_2 = \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{cases} +1v_1 \\ -2v_2 \\ +0v_3 \end{cases} \quad \text{Hauptvektor!}}$$

$$Av_3 = \boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{cases} +0v_1 \\ +1v_2 \\ -2v_3 \end{cases} \quad \text{Hauptvektor!}}, \qquad B = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{Jordan–Block!}}$$

4

**4B.** Bestimmen Sie die Lösungen $y_1, y_2, y_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ von $y'(t) = A\,y(t)$ mit $y_k(0) = v_k$.

$$y_1(t) = \boxed{\mathrm{e}^{-2t} v_1 = \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Dies ist eine Eigenfunktion.}}$$

$$y_2(t) = \boxed{\mathrm{e}^{-2t} \big[ v_2 + t v_1 \big] = \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} -t \\ -2 + 4t \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{Hauptfunktion zweiter Stufe}}$$

$$y_3(t) = \boxed{\mathrm{e}^{-2t} \left[ v_3 + t v_2 + \frac{t^2}{2} v_1 \right] = \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 1 - t^2/2 \\ -3 - 2t + 2t^2 \\ -t \end{pmatrix} \qquad \text{Hauptfunktion dritter Stufe}}$$

Welches asymptotische Verhalten hat die Lösung $y_3(t)$ für $t \to \infty$?

$$\boxed{\text{Für } t \to \infty \text{ gilt } y_3(t) \to 0. \qquad \text{Stabilität von Lösungen}}$$

4

**4C.** Das inhomogene Differentialgleichungssystem $u'(t) = A\,u(t) + 4e^{2t}v_1$ besitzt Lösungen der Form $u(t) = c(t)\,y_1(t)$. Leiten Sie diesen Ansatz ab und nutzen Sie $y_1'(t) = A\,y_1(t)$:

$$u'(t) = \boxed{c'(t)\,y_1(t) + c(t)\,y_1'(t) \quad = \quad c'(t)\,\underbrace{e^{-2t}v_1}_{=y_1(t)} + c(t)\,\underbrace{A\,y_1(t)}_{=y_1'(t)}} \overset{!}{=} A\,c(t)\,y_1(t) + 4e^{2t}v_1$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten Sie eine Gleichung für $c'(t)$:

$c'(t) =$ $4e^{4t}$ Koeffizientenvergleich in der vorigen Gleichung

Hieraus erhalten Sie leicht die gesuchte Funktion:

$c(t) =$ $e^{4t}$ Als Lösung finden wir also $u(t) = e^{2t}v_1$. Machen Sie die Probe! 3

*Erläuterung:* Der gegebene Ansatz ist ein Spezialfall der Variation der Konstanten, allgemein $u(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t) + c_3(t)y_3(t)$. Die volle Methode müssen Sie hier nicht anwenden, es genügt für diese Aufgabe, den gegebenen Ansatz einzusetzen und sorgfältig durchzurechnen.

---

**4D.** Wir betrachten für eine Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die partielle Differentialgleichung

$$(3x - 4y)\partial_x u(x, y) + (2y - x)\partial_y u(x, y) = u(x, y) \quad \text{mit} \quad u(x, 0) = \sin(x).$$

Formulieren Sie das gewöhnliche Differentialgleichungssystem für die charakteristischen Kurven $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$, sodass $u(x(t), y(t)) = z(t)$ gilt:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ \sin(x_0) \end{pmatrix}$$

3

*Erläuterung:* Gewöhnliche Differentialgleichungssysteme wie dieses können wir wie oben lösen und damit $u$ bestimmen. Im Rahmen dieser Klausur müssen wir darauf aus Zeitgründen verzichten. Wie in Vorlesung und Übung gesehen können Sie es aber gerne einmal versuchen!

---

**Aufgabe 5.** *Differentialgleichungen (2+2+2+1+2+2 = 11 Punkte)*

**5A.** Lösen Sie die homogene lineare Differentialgleichung $y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = 0$.

Bestimmen Sie das zugehörige charakteristische Polynom $p$ und seine Faktorisierung:

$p(x) =$ $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$ Doppelte Nullstelle!

Folgern sie hieraus die allgemeine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unserer Differentialgleichung:

$y(t) =$ $(c_1 + c_2 t)\, \mathrm{e}^{-3t}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Fundamentallösungen!

2

**5B.** Bestimmen Sie eine Partikulärlösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = \mathrm{e}^{-3t}$.

Ansatz:

$y(t) =$ $c\, t^2\, \mathrm{e}^{-3t}$ Ansatz für spezielle rechte Seite mit doppelter Resonanz!

Lösung:

$y(t) =$ $\dfrac{1}{2} t^2\, \mathrm{e}^{-3t}$ Lösungsformel $c = 1/p''(-3)$ oder Koeffizientenvergleich!

2

**5C.** Bestimmen Sie eine Partikulärlösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ von $y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.

$y(t) =$ $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{p(\mathrm{i})} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{8+6\mathrm{i}} = \dfrac{4-3\mathrm{i}}{50}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ Der Ansatz $c\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ liefert $(8+6\mathrm{i})c = 1$.

Leiten Sie daraus eine Partikulärlösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = 50\cos(t)$ ab.

$y(t) =$ $\mathrm{Re}\Big[(4-3\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\Big] = 4\cos(t) + 3\sin(t)$ Realteil der vorigen Lösung mal 50.

2

**5D.** Nennen Sie die allgemeine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = 10\,\mathrm{e}^{-3t} + 50\cos(t)$:

$y(t) =$ $4\cos(t) + 3\sin(t) + \mathrm{e}^{-3t}(c_1 + c_2 t + 5t^2)$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, dank der vorigen Fragen.

1

---

Wir untersuchen nun für $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die partielle Differentialgleichung

$$\partial_x^2\, u(x,y) + 6\partial_x\, u(x,y) = \partial_y^2\, u(x,y).$$

Gesucht sind alle nicht-trivialen Lösungen in Produktform $u(x,y) = v(x) \cdot w(y)$.

**5E.** Bestimmen Sie die gewöhnliche Differentialgleichung für $v(x)$:

$$\frac{v''(x) + 6v'(x)}{v(x)} = \lambda, \qquad \text{also} \qquad v''(x) + 6v'(x) = \lambda v(x)$$

Bestimmen Sie die gewöhnliche Differentialgleichung für $w(y)$:

$$\frac{w''(y)}{w(y)} = \lambda, \qquad \text{also} \qquad w''(y) = \lambda w(y)$$

2

**5F.** Bestimmen Sie speziell für $w(y) = \cos(3y)$ die zugehörige Gleichung für $v(x)$:

$$w''(y) = -9w(y) \qquad \text{also} \qquad \lambda = -9 \qquad \text{und somit} \qquad v''(x) + 6v'(x) = -9v(x)$$

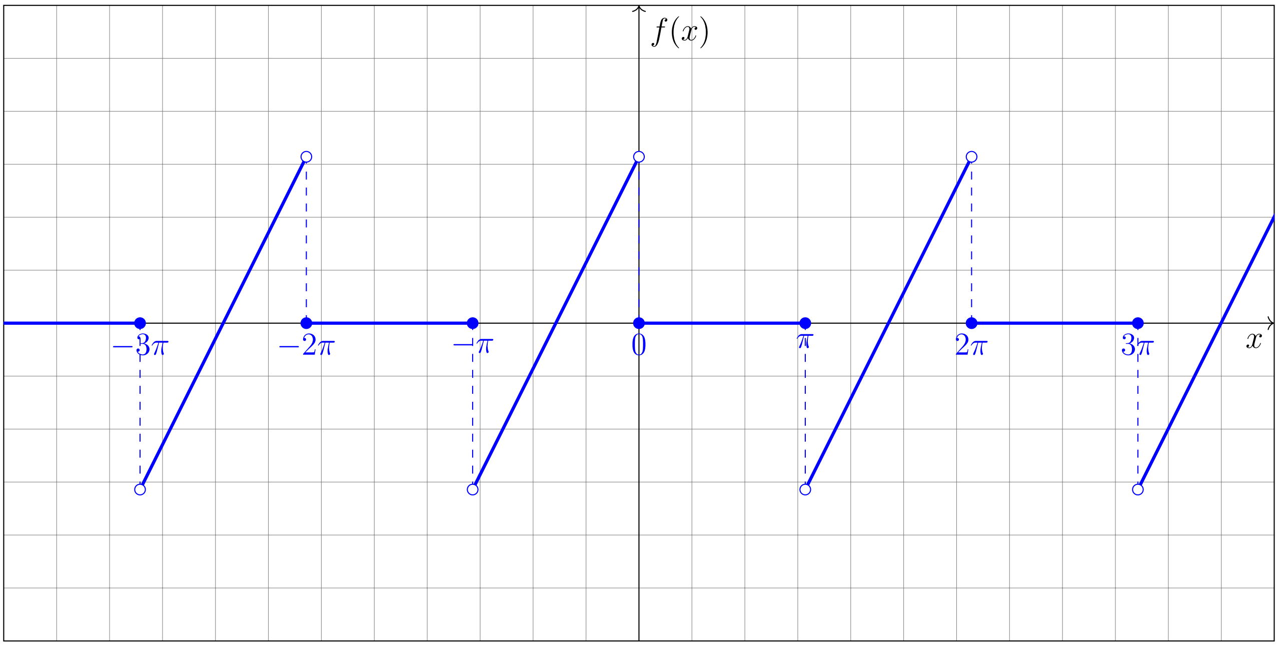
Nennen Sie alle Lösungen $u(x,y) = v(x) \cdot \cos(3y)$ unserer partiellen Differentialgleichung:

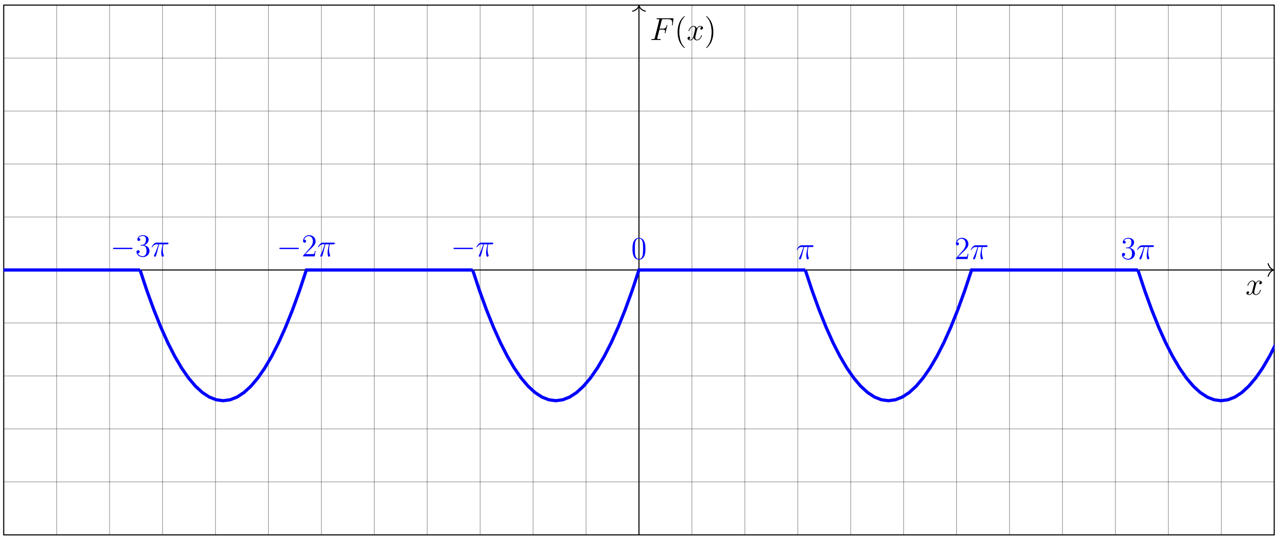
$$u(x,y) = (c_1 + c_2 x)\,\mathrm{e}^{-3x} \cdot \cos(3y) \qquad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2

**Aufgabe 6.** *Fourier–Reihen (2+2+3+2+3 = 12 Punkte)*

**6A.** Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei $2\pi$–periodisch mit $f(x) = 2x + \pi$ für $-\pi < x < 0$ und $f(x) = 0$ für $0 \le x \le \pi$. Skizzieren Sie die Funktionen $f(x)$ und $F(x) = \int_{t=0}^{x} f(t)\,dt$ auf $[-12, 12]$:




2

**6B.** Finden Sie die Grenzwerte der Fourier–Reihe $f_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ von $f$ in $x \in \{0, \pi\}$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \boxed{+\frac{\pi}{2}}\,, \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(\pi) = \boxed{-\frac{\pi}{2}}$$

2

**6C.** Bestimmen Sie die Koeffizienten der Fourier–Reihe $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$:

$$\text{Es gilt } a_k = \begin{cases} 0 & \text{für } k \ge 0 \text{ gerade,} \\ \frac{4}{\pi k^2} & \text{für } k \ge 1 \text{ ungerade.} \end{cases}$$

| | |
|---|---|
| $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sin(kx)\,\mathrm{d}x$ | Fourier–Koeffizienten |
| $= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (2x+\pi)\sin(kx)\,\mathrm{d}x$ | Funktion $f$ einsetzen |
| $= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{k}(2x+\pi)\cos(kx)\right]_{-\pi}^{0} + \int_{-\pi}^{0}\frac{2}{k}\cos(kx)\,\mathrm{d}x\right)$ | Partielle Integration |
| $= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{k} - \frac{\pi}{k}\cos(-k\pi) + \left[\frac{2}{k^2}\sin(kx)\right]_{-\pi}^{0}\right)$ | Sorgfältig ausrechnen |
| $= \frac{-1}{k}\big(1+(-1)^k\big) = \begin{cases} \frac{-2}{k} & \text{für } k \ge 2 \text{ gerade,} \\ 0 & \text{für } k \ge 1 \text{ ungerade.} \end{cases}$ | Soweit möglich vereinfachen |

3

**6D.** Bestimmen Sie durch Auswertung der Fourier–Reihe von $f$ an der Stelle $x = \pi$ den Wert der Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \dots$.

| | |
|---|---|
| $-\frac{\pi}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overbrace{\cos(k\pi)}^{=(-1)^k} + b_k \overbrace{\sin(k\pi)}^{=0} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2j+1)^2}$ | Spezialisieren in $x = \pi$. |
| $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ | Auflösen nach der Reihe |

*Erläuterung:* Die erste Gleichung gilt dank des Satzes von Dirichlet (Frage 6B), denn im Punkt $x = \pi$ existieren die einseitigen Grenzwerte $f(x\pm)$ und Ableitungen $f'(x\pm)$.

2

**6E.** Folgern Sie die Koeffizienten der Fourier–Reihe $F(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx)$:

$$A_0 = \boxed{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x^2 + \pi x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3} + \frac{\pi x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0} = -\frac{\pi^2}{6}}$$

$$A_k = \boxed{-\frac{b_k}{k} = \begin{cases} \frac{2}{k^2} & \text{für } k \ge 2 \text{ gerade,} \\ 0 & \text{für } k \ge 1 \text{ ungerade.} \end{cases}}$$

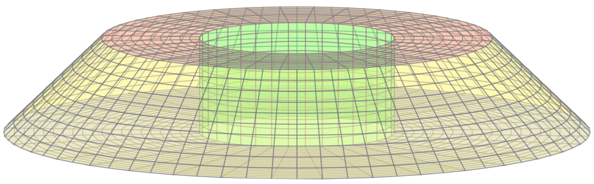
$$B_k = \boxed{\frac{a_k}{k} = \begin{cases} 0 & \text{für } k \ge 2 \text{ gerade,} \\ \frac{4}{\pi k^3} & \text{für } k \ge 1 \text{ ungerade.} \end{cases}}$$

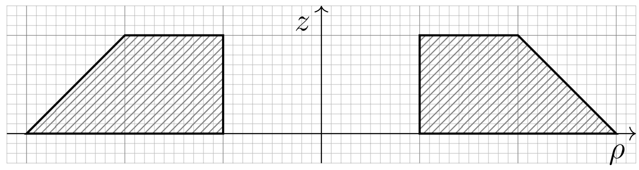
3

**Aufgabe 7.** *Integration über Körper und Flächen (5+1+3+3+1 = 13 Punkte)*

Wir betrachten folgenden Kegelstumpf mit zentraler Ausbohrung:

$$K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 \le z \le 1,\ 1 \le x^2 + y^2 \le (3 - z)^2 \right\}.$$






**7A.** Parametrisieren Sie den Körper $K$ in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad 0 \le z \le 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad \boxed{1} \le \rho \le \boxed{3 - z}.$$

Berechnen Sie für die äußere Mantelfläche $M = \left\{ (x, y, z) \in K \;\middle|\; x^2 + y^2 = (3 - z)^2 \right\}$ den Normalenvektor, seine Länge sowie den Flächeninhalt $\operatorname{vol}_2(M)$:

$$\frac{\partial \Phi_M}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi_M}{\partial z} = \boxed{\begin{pmatrix} -(3 - z)\sin\varphi \\ (3 - z)\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}} \times \boxed{\begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}} = \boxed{(3 - z)\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\left| \frac{\partial \Phi_M}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi_M}{\partial z} \right| = \boxed{\sqrt{2}\,(3 - z)}, \quad \operatorname{vol}_2(M) = \boxed{5\sqrt{2}\,\pi}$$

5

*Erläuterung:* Die Fläche erhalten Sie durch das Integral $\operatorname{vol}_2(M) = \int_{z=0}^{1} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sqrt{2}(3 - z)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = 2\sqrt{2}\,\pi\big[3z - z^2/2\big]_0^1 = 5\sqrt{2}\,\pi$ oder noch leichter aus der Guldinschen Regel für Rotationsflächen.

**7B.** Wir betrachten im Folgenden das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y^2 x \\ x^2 y \\ \mathrm{e}^{x^2/2} \cdot \mathrm{e}^{y^2/2} \end{pmatrix}.$$

Der Fluss $I_Z = \int_{s \in Z} f(s) \bullet \mathrm{d}S$ durch den inneren Zylinder $Z = \left\{ (x, y, z) \in K \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1 \right\}$ ist Null. Nennen Sie den geometrischen Grund:

Das Vektorfeld $f$ ist überall tangential an die Fläche $Z$ (senkrecht auf den Normalenvektor).

*Erläuterung:* Sie können das ausführlicher ausrechnen oder kürzer auch direkt sehen: In der $x$–$y$–Ebene ist $f$ tangential an den Kreis. Hinzu kommt der senkrechte Anteil in $z$–Richtung.

1

**7C.** Berechnen Sie die Quellstärke des Vektorfeldes $f$ auf $K$:

$$I_K := \int_K \operatorname{div} f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z)$$ Divergenz berechnen

$$= \int_K (-y^2 + x^2 + 0)\,\mathrm{d}(x,y,z)$$ Zu Zylinderkoordinaten wechseln

$$= \int_{z=0}^{1} \int_{\rho=1}^{3-z} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho^2 \Big[-\sin(\varphi)^2 + \cos(\varphi)^2\Big] \cdot \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z$$ Funktionaldeterminante $\rho$

$$= \int_{z=0}^{1} \int_{\rho=1}^{3-z} \rho^3\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} -\sin(\varphi)^2 + \cos(\varphi)^2\,\mathrm{d}\varphi$$ Linearität bzgl. Konstanten

$$= 0$$ Das letzte Integral verschwindet.

*Erläuterung:* Mit Hilfe der Rotationssymmetrie des Körpers $K$ können Sie das Ergebnis auch in der zweiten Zeile schon sehen, denn $\int_K x^2\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_K y^2\,\mathrm{d}(x,y,z)$.

3

**7D.** Berechnen Sie den Fluss von $f$ durch den Deckel $D = \{\, (x,y,z) \in K \mid z = 1 \,\}$ nach außen.

$$I_D := \int_{s\in D} f(s) \cdot \mathrm{d}S$$ Die Einheitsnormale ist hier $n_D = (0,0,1)$.

$$= \int_{(x,y,1)\in D} \mathrm{e}^{(x^2+y^2)/2}\,\mathrm{d}(x,y)$$ Wir wechseln zu obigen Polarkoordinaten…

$$= \int_{\rho=1}^{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{e}^{\rho^2/2}\,\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho$$ Funktionaldeterminante $\rho$ nicht vergessen!

$$= 2\pi \Big[\mathrm{e}^{\rho^2/2}\Big]_{\rho=1}^{2} = 2\pi\big(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{1/2}\big)$$ Stammfunktion ausschreiben und auswerten.

*Erläuterung:* Ebenso können Sie $D$ durch $\Phi_D$ parametrisieren (mit $z = 1$) und die Normale $\partial_\rho \Phi_D \times \partial_\varphi \Phi_D = (0,0,\rho)$ verwenden. Das Integral kennen Sie vom Gaußschen Kunstgriff zur Berechnung von $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$. Transformationssatz und Funktionaldeterminante: Erst der zusätzliche Faktor $\rho$ ermöglicht die einfache Stammfunktion! Ohne geht's nicht.

3

**7E.** Der Fluss durch den Boden $B = \{\, (x,y,z) \in K \mid z = 0 \,\}$ nach außen ergibt ebenso $I_B = 2\pi(\mathrm{e}^{1/2} - \mathrm{e}^{9/2})$. Bestimmen Sie den Fluss $I_M$ von $f$ durch den Mantel $M$ nach außen.

Dank dem Satz von Gauß gilt die Bilanz $0 = I_K = I_M + I_D + I_B + I_Z = I_M + 2\pi(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{9/2})$, also $I_M = 2\pi(\mathrm{e}^{9/2} - \mathrm{e}^2)$. Sie können auch direkt integrieren, versuchen Sie es als Übung!

1

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.