Institut für Geometrie und Topologie
Universität Stuttgart

Prof. Dr. W. Kimmerle

**Höhere Mathematik III** **Diplomvorprüfung** **17. März 2003**

# 1. Klausur

für Studierende der Fachrichtungen **bau, immo**

**Bitte unbedingt beachten:**

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120** Minuten. Verlangt und gewertet werden **alle Aufgaben**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 25 handbeschriebene DIN A4–Blätter sowie Zeichenmaterial. Nicht erlaubt sind insbesondere Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengeräte.
- Bei den **Aufgaben 1 und 2** sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitung separate Blätter.
- Bei den **Aufgaben 3 und 4** sind nur die Ergebnisse verlangt. Tragen Sie diese in die dafür vorgesehenen Felder auf den Aufgabenblättern ein.
- Bei **Aufgabe 5** gibt es für jedes richtig gesetzte Kreuz einen Punkt und für jedes falsch gesetzte Kreuz einen Minuspunkt. Die Aufgabe wird aber minimal mit 0 Punkten bewertet.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 23. 04. 2003 im NWZ II, Pfaffenwaldring 57, 7. Stock, durch Aushang bekanntgegeben.

  Viel Erfolg!!

**Hinweise für Wiederholer:**

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, und bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich bis zum 2. 05. 2003 in Raum V57.7.346 einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

**Aufgabe 1** (13 Punkte)

Sei $P = (x, y, z)$ ein Punkt der Ebene $E : 3x - 2z = 0$. Weiter seien die Punkte $A = (1, 1, 1)$ und $B = (2, 3, 4)$ gegeben.

**a)** Bestimmen Sie unter Verwendung der Methode von Lagrange diejenige Lage von $P$, bei der die Summe der Abstandsquadrate $U = |\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2$ minimal wird.

*Bemerkung:* $U$ kann als Spannungsenergie gedeutet werden, wenn $P$ elastisch mit $A$ und $B$ verbunden ist.

**b)** Lösen Sie die Aufgabe auch, indem Sie mit Hilfe der Nebenbedingung $E$ eine Variable aus $U$ eliminieren und dann das reduzierte Minimierungsproblem ohne Nebenbedingung lösen. Weisen Sie dabei die Minimaleigenschaft von $P$ nach.

---

**Aufgabe 2** (16 Punkte)

Die $2\pi$–periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \frac{1}{12}(3x^2 - \pi^2), \qquad -\pi \le x \le \pi\,.$$

**a)** Skizzieren Sie den Graph von $f$ für $-2\pi \le x \le 2\pi$.

**b)** $f$ besitzt die Fourierreihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Welche Fourierkoeffizienten lassen sich allein auf Grund der Symmetrie–Eigenschaften von $f$ ohne Rechnung bestimmen?
Berechnen Sie die weiteren Fourierkoeffizienten von $f$ und geben Sie die Fourierreihe an.

**c)** Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Fourierreihe gegen $f(x)$?

**d)** Bestimmen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

durch Auswertung der Fourierreihe an einem speziellen Punkt.

**e)** Die $2\pi$–periodische Funktion $g$ sei definiert durch

$$g(x) = \begin{cases} f(x+\pi) & \text{für } -\pi \le x \le 0 \\ f(x-\pi) & \text{für } 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

Skizzieren Sie den Graph von $g$ für $-\pi \le x \le \pi$.

**f)** Berechnen Sie mit Hilfe der Substitution $\tau = x - \pi$ und den bisherigen Ergebnissen das Integral $\int_0^\pi g(x) \cos kx \, dx$ und bestimmen Sie damit die Fourierreihe von $g$.

*Hinweis:* $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \, \cos\beta - \sin\alpha \, \sin\beta$.

**Name:** ______ **Mat.-Nr.:** ______

**Aufgabe 3** (15 Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ sei die Fläche $S = \{(x, y, z) | (x + 1)^2 + yz = 0, z \leq y \leq z + 2\}$ gegeben.

Berechnen Sie Funktionalmatrix $A = \dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$ und Funktionaldeterminante $|A|$ der Transformation $y = u + w,\ x = v - 1,\ z = u - w$.

$A =$ ______ , $|A| =$ ______

Beschreiben Sie $S$ in $(u, v, w)$ - Koordinaten: $S = \{(u, v, w) |$ ______ $\}$

Skizzieren Sie $S$ im $(u, v, w)$ - System: ______

Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung $(u, v, w) = X(r, \varphi)$ von $S$ mit Hilfe von Zylinderkoordinaten und einen zugehörigen Normalenvektor $N(r, \varphi)$.

$X(r, \varphi) =$ ______ , $N(r, \varphi) =$ ______

Ergänzen Sie das Zweifach–Integral so, dass es den den Flächeninhalt $F(S)$ von $S$ beschreibt und berechnen Sie $F(S)$.

$$\int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} \square \, d\square \, d\square = \square$$

Berechnen Sie den geometrischen Schwerpunkt $SP$ von $S$ im $(u, v, w)$ - System.

$u_{SP} =$ ______ , $v_{SP} =$ ______ , $w_{SP} =$ ______

Wie lautet die $z$ - Koordinate des Schwerpunkts von $S$ im $(x, y, z)$ - System ?

$z_{SP} =$ ______

**Aufgabe 4** (12 Punkte)

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$(ax^4 + bx^3)y - 2x^2 + x^4 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0\,, \quad a, b \in \mathbb{R}\,, \quad x > 0.$$

Für welche Werte von $a, b$ ist die Differentialgleichung exakt?

Geben Sie die Differentialgleichung an, die ein nur von $x$ abhängiger integrierender Faktor $\mu(x)$ erfüllen muss: $\mu'(x)/\mu(x) =$

Geben Sie den integrierenden Faktor $\mu(x)$ in Abhängigkeit von $a$ und $b$ an: $\mu(x) =$

Für welche Werte von $a, b$ wird die Differentialgleichung durch den integrierenden Faktor $\mu_1(x) = e^x$ exakt?

Im Folgenden sei $a = b = 2$.

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung mit Hilfe des integrierenden Faktors

$$\mu_2(x) = \frac{e^{2x}}{x^2}\,.$$

Geben Sie die allgemeine Lösung in der Form $F(x, y) = k =$konstant an. $F(x, y) = \qquad = k$

Welchen Wert hat die Konstante $k$ für die Lösungskurve $K_1$ durch den Punkt $P = (1, 1)$? $k =$

Wie lautet die nach $y$ aufgelöste, explizite Gleichung dieser Kurve $K_1$? $y(x) =$

---

**Aufgabe 5** (4 Punkte)

Gegeben sei ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld $g : B \to \mathbb{R}^3$.

Kreuzen Sie bei den folgenden Aussagen an, ob sie wahr sind oder ob sie falsch sind.

| | | |
|---|---|---|
| Falls $\operatorname{div} g = 1$, besitzt $g$ keine Potentialfunktion. | wahr ○ | falsch ○ |
| Falls $g$ eine Potentialfunktion besitzt, ist $\operatorname{rot} g = 0$. | wahr ○ | falsch ○ |
| Es gilt $\operatorname{div}(\operatorname{rot} g) = 0$. | wahr ○ | falsch ○ |
| Falls es in $B$ eine geschlossene Kurve $K$ gibt, mit $\int_K g\,\mathrm{d}r = 0$, besitzt $g$ eine Potentialfunktion. | wahr ○ | falsch ○ |