Klausur zur Höheren Mathematik 3

für **kyb, mech, phys**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Sechs Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig.**
- In **den Aufgaben 1 – 6 und 11 – 15** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 7 – 10** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab 1.10.2016 über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:
Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.
Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen **vom 19.10.2016 bis 21.10.2016 zwischen 10:00 und 11:00 oder vom 19.10.2016 bis 20.10.2016 zwischen 14:00 und 15:00** mit Elke Gangl (Raum V57.7.521) einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.
Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*7 Punkte*)

(a) Sei $\beta : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\beta(t) = (t\sin(t) + \cos(t), \sin(t) - t\cos(t))$. Zeigen Sie, dass β rektifizierbar ist, und bestimmen Sie die Bogenlänge.

(b) Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\gamma(t) = \begin{cases} (0,0) & t = 0, \\ (t, t\cos(\frac{1}{t})) & 0 < t \leqq 1. \end{cases}$

Beweisen Sie, dass die Kurve γ nicht rektifizierbar ist.

Aufgabe 2 (*9 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, an denen die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = zRe(z)$, komplex differenzierbar ist.

(b) Sei $p : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ das Polynom gegeben durch $p(x+iy) = a\,x^2 + 2\,b\,xy + c\,y^2 + 1$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie alle Koeffizienten a, b und c, so dass p der Realteil einer ganzen Funktion g ist. Bestimmen Sie in diesen Fällen die Funktion g.

Aufgabe 3 (*8 Punkte*)

Sei $D = \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\ x + y + z = 1\ \}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge D eine Ellipse ist.

(b) Bestimmen Sie eine Parametrisierung von D und berechnen Sie das Integral

$$\int_D -y^3\,dx + x^3\,dy - z^3\,dz.$$

Hinweis: Sie dürfen $\int_0^{2\pi} \cos^4(t) + \sin^4(t)\,dt = \frac{3}{2}\pi$ verwenden.

Aufgabe 4 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie das Volumen der Menge $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + \frac{z^2}{3} \leqq 4, z \geqq 0\}$.

Aufgabe 5 (*6 Punkte*) Seien $f_j : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ die Funktionen:

$$f_1(x) = \begin{cases} 2 + \frac{2}{\pi}x & x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \\ 1 & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ 2 - \frac{2}{\pi}x & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} \pi + x & x \in [-\pi, 0) \\ \pi & x \in [0, \pi) \end{cases} \qquad f_3(x) = \begin{cases} 2 + \frac{2}{\pi}x & x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \\ 0 & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ -2 + \frac{2}{\pi}x & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$$

Die 2π-periodische Fortsetzung einer dieser Funktionen hat die Fourier-Koeffizienten

$$c_0 = m \text{ für ein } m \in \mathbb{R} \qquad \text{und } c_k = \begin{cases} \frac{i}{2k} & k \text{ gerade}, k \neq 0 \\ \frac{1}{\pi k^2} - \frac{i}{2k} & k \text{ ungerade} \end{cases}.$$

(a) Skizzieren Sie die Funktionen f_1, f_2, f_3 für das Intervall $[-2\pi, 2\pi]$.

(b) Bestimmen Sie welche der Funktionen die Fourier-Koeffizienten $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ hat.

(c) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe zu den Fourierkoeffizienten $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$.

Aufgabe 6 (*5 Punkte*)

Sei $B = \{r \in \mathbb{R}^3 : ||r|| \leqq 1\}$ und $J : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein differenzierbares Vektorfeld, das auf dem Rand von B verschwindet und $\operatorname{div}(J) = 0$ erfüllt. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{div}(fJ) = < \nabla(f), J >$.

(b) $\int_B < \nabla(f), J > dV = 0$.

Name, Vorname:		Matrikel-Nummer:		Studien-gang:	

Aufgabe 7 (*5 Punkte*)

Gegeben ist die Funktion $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, p(x, y, z) = x^2 \cos(y) + z$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla(p)$:

(b) Bestimmen Sie $\operatorname{div}(p \cdot \nabla(p))$:

(c) Bestimmen Sie $\operatorname{rot}(\nabla(p)) + \nabla(p)$:

Aufgabe 8 (*6 Punkte*)

Die Fourierreihe der Funktion $f(x) = (x - \pi)^2,\ x \in [0, 2\pi)$, ist

$$F(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos(k\,x).$$

(a) Bestimmen Sie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} =$$

(b) Bestimmen Sie die reellen Fourierkoeffizienten der Funktion $g(x) = 3x^2 - \pi^2,\ x \in [-\pi, \pi)$,

$a_k =$ $b_k =$

Aufgabe 9 (*5 Punkte*)

Sei $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leqq 1\}$ und δS der Rand der Fläche S.

Sei $V : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2y \\ 2z \\ 2x \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie

$$\int_S \operatorname{rot}(V)\, d\sigma =$$

(b) Bestimmen Sie

$$\int_{\delta S} 5\,V \; ds = \boxed{}$$

Aufgabe 10 (*5 Punkte*)

Gegeben ist die Familie von Vektorfeldern $V_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ V_a(x,y) = (ay^2x, x^2y)$ mit $a \in \mathbb{R}$.

(a) $\{a \in \mathbb{R} \mid V_a \text{ hat ein Potential in } \mathbb{R}^2\} = \boxed{}$

(b) Bestimmen Sie ein Potential von V_a in Abhängigkeit von a,

sofern ein solches existiert: $\boxed{}$

Aufgabe 11 (*7 Punkte*) Berechnen Sie das Integral:

$$\int_\gamma \frac{e^{2z}}{z^2(z^2+2z+2)}\ dz,$$

wobei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = 3e^{it}$.

Aufgabe 12 (*7 Punkte*)

Bestimmen Sie das Betragsmaximum der Funktionen $f_i : E \to \mathbb{C}$ auf der Menge $E := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqq 1\}$:

(a) $f_1(z) = 2\,(z^2+1)$,

(b) $f_2(z) = 5 - |z|^2$.

Aufgabe 13 (*5 Punkte*)

Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(e^z) = 0$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leqq 1$.

Aufgabe 14 (*7 Punkte*)

Bestimmen Sie die Singularitäten und Residuen der Funktionen:

(a) $f_1(z) = \frac{e^z}{1-z^4}$.

(b) $f_2(z) = (z+3)\sin(\frac{1}{z+3})$.

Aufgabe 15 (*4 Punkte*)

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion, so dass $f(0) = 1$ und $|f(z)| = 2$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 2$. Zeigen Sie, dass f eine Nullstelle hat.
