Institut für Geometrie und Topologie
Universität Stuttgart

Prof. Dr. W. Kimmerle

Höhere Mathematik III **Diplomvorprüfung** **18. März 2003**

2. Klausur

für Studierende der Fachrichtungen **bau, immo**

Klausur

für Studierende der Fachrichtungen **enan, famo, mach, umw, tema**

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120** Minuten. Verlangt und gewertet werden **alle Aufgaben**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 25 handbeschriebene DIN A4–Blätter sowie Zeichenmaterial. Nicht erlaubt sind insbesondere Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengeräte.
- Bei den **Aufgaben 1 und 2** sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitung separate Blätter.
- Bei den **Aufgaben 3 und 4** sind nur die Ergebnisse verlangt. Tragen Sie diese in die dafür vorgesehenen Felder auf den Aufgabenblättern ein.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 23. 04. 2003 im NWZ II, Pfaffenwaldring 57, 7. Stock, durch Aushang bekanntgegeben.

  Viel Erfolg!!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, und bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich bis zum 2. 05. 2003 in Raum V57.7.346 einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (15 Punkte)

Gegeben sei das Vektorfeld $v_\alpha : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ durch

$$v_\alpha(x,y,z) = \begin{pmatrix} (2-\alpha)y + z \\ z + \alpha x \\ x + y \end{pmatrix}$$

mit dem reellen Paramater α.

a) Für welches $\alpha = \alpha_0$ besitzt v_{α_0} ein Potential?
Berechnen Sie für $\alpha = \alpha_0$ dieses Potential.

b) Es sei K der Schnitt des Zylinders $x^2 + y^2 = 1$ mit der Ebene $x + z = 1$. Geben Sie eine Parametrisierung von K an.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe von a) den Wert des Kurvenitegrals $\int_K v_{\alpha_0} \mathrm{d}x$.

d) Berechnen Sie nun unter Verwendung von $v_\alpha = v_{\alpha_0} + w$ mit einem geeigneten Vektorfeld w das Kurvenintegral $\int_K v_\alpha \mathrm{d}x$.

Aufgabe 2 (15 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle nicht–trivialen Lösungen der partiellen Differentialgleichung

$$u_t = u_{xx}$$

welche die Randbedingung

$$u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0$$

erfüllen und die Form

$$u(x,t) = v(x)\, w(t)$$

haben.

Hinweis: Es sind 3 Fälle zu untersuchen.

b) Geben Sie die Lösung aus **a)** an, welche zusätzlich die Anfangsbedingung

$$u(x,0) = 2\sin 3x - 7\sin 5x \text{ für } 0 \leq x \leq \pi$$

erfüllt. Wie verhält sich diese Lösung für $t \to \infty$?

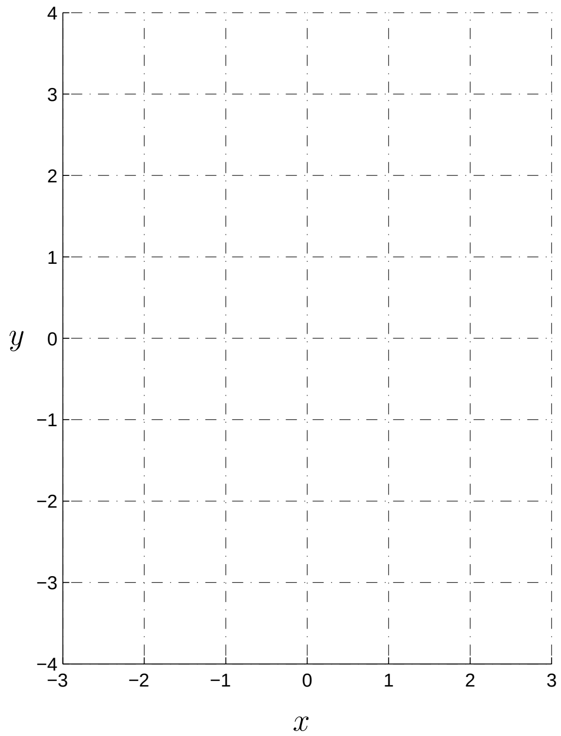
Name: ____________________ **Mat.-Nr.:** ____________

Aufgabe 3 (15 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = (1 - x^2 - y)(1 - x^2 + y)x = x^5 - 2x^3 - xy^2 + x$$

Skizzieren Sie im vorgegebenen Ausschnitt der xy-Ebene die Kurven mit $f(x,y) = 0$ und geben Sie an, wo $f(x,y) > 0$ (Markierung mit +) oder $f(x,y) < 0$ (Markierung mit -) ist.



Berechnen Sie f_x und f_y.

$f_x =$ ____________________

$f_y =$ ____________________

Tragen Sie in die unten stehende Tabelle alle kritischen Punkte von f ein und kreuzen Sie deren Typ an. (Lassen Sie nicht benötigte Spalten leer.)

Punkt							
lokales Minimum							
lokales Maximum							
Sattelpunkt							

Aufgabe 4 (15 Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ sei der Körper M, der durch den Graph S der Funktion $f(x,y) = 6 - \sqrt{x^2+y^2+16}$ und der Ebene E mit der Gleichung $z = 1$ eingeschlossen wird, gegeben. Die Kurve K sei gegeben durch $S \cap E$.

Das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$g : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x^2+y \\ z^2-3y \\ 2xz-y \end{pmatrix}.$$

Skizzieren Sie den Schnitt von M mit der Ebene $y = 0$: $\boxed{}$

Der nach außen weisende Normaleneinheitsvektor von ∂M in $(-1,0,1)$ ist: $\boxed{}$.

$\operatorname{rot} g = \boxed{}$, $\quad \operatorname{div} g = \boxed{}$.

Eine Parametrisierung $v(t)$ der Kurve K lautet $\boxed{}$.

Ergänzen Sie das Dreifach–Integral so, dass es das Volumen von M beschreibt:

$$\int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \boxed{} \, \mathrm{d}\boxed{} \, \mathrm{d}\boxed{} \, \mathrm{d}\boxed{}$$

Das Volumen von M ist $\boxed{}$.

$\iint\limits_{\partial M} g \cdot n \, \mathrm{d}O = \boxed{}$ (Hierbei sei n der nach außen weisende Normaleneinheitsvektor.)

Schreiben Sie nach dem Satz von Stokes $\left|\int_K g \, \mathrm{d}x\right|$ als Oberflächenintegral und berechnen Sie es.

$$\left|\int_K g \mathrm{d}x\right| = \left| \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \boxed{} \, \mathrm{d}\boxed{} \, \mathrm{d}\boxed{} \right| = \boxed{}$$