Klausur zur Höheren Mathematik I und II

für die Fachrichtungen: el, kyb, mecha, phys

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 4 eigenhändig handbeschriebene DIN-A4-Blätter.
  Insbesondere sind Taschenrechner, Handys und Computer nicht erlaubt.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- **Alle Aufgaben** zählen.
- **Bei allen Aufgaben sind sämtliche Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht!** Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab **10. April 2017** über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, werden voraussichtlich ab dem **17. April 2017** nähere Informationen bezüglich der mündlichen Nachprüfung auf der Homepage zu HM II–Steinwart

`http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Steinwart-SS16/`

finden.

Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*10 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der Matrix A mit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ist die Matrix A diagonalisierbar?

(b) Die Matrix $A \in M(3,3)$ besitze die Eigenwerte $\lambda_1 = -9, \lambda_2 = 1 + \sqrt{7}$ und $\lambda_3 = 1 - \sqrt{7}$. Geben Sie die Spur von A an. Ist A invertierbar?

(c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ -2 & 6 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

Welchen Rang hat A?

(d) Bestimmen Sie die Determinante von $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2 (*10 Punkte*)

(a) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(3n+4)^n - 7^n}}{2n}$ ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\ln(2n) - \ln(n+3))$ iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sqrt{x} \cdot \sin(1/x)$

(b) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^3}{3^n - 1}$ ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$ iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n + 2\sqrt{n}}}$

(c) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie den Betrag der folgenden komplexen Zahlen.

i) $\displaystyle\frac{2-3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$ ii) $\displaystyle\left(\frac{\mathrm{i} - \sqrt{3}}{2}\right)^{317}$

Aufgabe 3 (*10 Punkte*)

(a) Gegeben sei die Quadrik $Q = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, \mathbf{x}^\top A\mathbf{x} + 1 = 0\}$, wobei $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

i) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D sowie eine orthogonale Matrix T, so dass $A = TDT^\top$.

ii) Geben Sie die Art der Quadrik Q an.

(b) Es sei $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ der Raum der reellen Polynome vom Grad höchstens 2. Weiter sei die Basis $\mathcal{B} = (p_1, p_2, p_3)$ mit $p_1(x) = 1 + x^2$, $p_2(x) = 1 - x$ und $p_3(x) = 2x$ von $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ gegeben. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von $\varphi : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $p \mapsto p' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p$ bezüglich $\mathcal{B}$.

(c) Es sei $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^7$ eine lineare Abbildung mit $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{span}(e_1, e_4)$. Welche Dimension hat das Bild von φ?

Aufgabe 4 (*10 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Vierecks mit den Kanten $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$, wobei $A = (1, 0, -2)$, $B = (3, 2, 0)$, $C = (2, 5, 7)$, $D = (-1, 1, 2)$.

(b) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene, die sowohl die Gerade $g = \{(2 + t, 1 - 2t, 5 + 3t)^\top \,:\, t \in \mathbb{R}\}$ als auch die Gerade $h = \{(2 - 2t, 3 + 4t, -6t)^\top \,:\, t \in \mathbb{R}\}$ enthält.

(c) Bestimmen Sie die Innenwinkel des Dreiecks ABC mit $A = (0, 0)$, $B = (\sqrt{3} - 1, 0)$, $C = (-1, 1)$.

Aufgabe 5 (*10 Punkte*)

(a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 e^{-x}$. Bestimmen und klassifizieren Sie alle lokalen Extremstellen von f.

(b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Potenzreihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{7^n}{n!} (x-2)^n$$

Geben Sie den Wert der Reihe für $x = 4$ an.

(c) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die das folgende uneigentliche Integral konvergiert:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}(x^3+1)^{\alpha}} \, \mathrm{d}x$$

(d) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

i) $\displaystyle\int \frac{5x-4}{x^2-x-2} \, \mathrm{d}x$ ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \, \mathrm{d}x$

Aufgabe 6 (*10 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x} = x + 2e^t.$$

(b) Bestimmen Sie diejenige Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x} = e^x t,$$

für die gilt $x(0) = 2$.

(c) Bestimmen Sie Jacobi-Matrix der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x,y) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2+1} \\ xe^y \\ y \end{pmatrix}$.

(d) Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = xe^{x-2y}$. Bestimmen Sie weiter das Taylor-Polynom zweiter Stufe zum Entwicklungspunkt $(x,y) = (2,1)$.