Aufgabe 1 (*10 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der Matrix A mit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ist die Matrix A diagonalisierbar?

(b) Die Matrix $A \in M(3,3)$ besitze die Eigenwerte $\lambda_1 = -9, \lambda_2 = 1+\sqrt{7}$ und $\lambda_3 = 1-\sqrt{7}$. Geben Sie die Spur von A an. Ist A invertierbar?

(c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ -2 & 6 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

Welchen Rang hat A?

(d) Bestimmen Sie die Determinante von $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Lösung:

(a) Wir stellen zunächst das charakteristische Polynom von A auf. Es ist

$$\det(A - \lambda I) = (-2-\lambda)[(-3-\lambda)(-1-\lambda)+1] = -(\lambda+2)\cdot[\lambda^2+4\lambda+4] = -(\lambda+2)^3.$$

Damit besitzt A den Eigenwert -2 mit der algebraischen Vielfachheit 3. Wir bestimmen nun den Eigenraum zum Eigenwert -2, indem wir das homogene lineare Gleichungssystem $(A+2I)x = 0$ lösen. Es ist

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Daraus lässt sich erkennen, dass der Lösungsraum gegeben ist durch

$$\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Da der Eigenraum zweidimensional ist, besitzt der Eigenwert -2 die geometrische Vielfachheit 2. Da geometrische und algebraische Vielfachheit nicht übereinstimmen, ist die Matrix nicht diagonalisierbar.

(b) Die Spur einer Matrix ist die Summe ihrer Eigenwerte (mit algebraischen Vielfachheiten gerechnet), so dass hier gilt

$$\operatorname{Sp} A = -9 + 1 + \sqrt{7} + 1 - \sqrt{7} = -7.$$

Da A keinen Nulleigenwert besitzt, ist A invertierbar.

(c) Wir führen den Gauß-Algorithmus durch und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & | & 4 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & | & 1 \\ -2 & 6 & 0 & -4 & | & -11 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & | & -3 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & | & -3 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & | & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & | & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich die Lösungsmenge

$$L = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \, : \, x = \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dass die Matrix den Rang 2 besitzen muss, sieht man sofort an der Zahl der Nullzeilen, die sich nach dem Durchführen des Gauß-Algorithmus ergeben.

(d) Wir vereinfachen die Matrix dadurch, dass wir das 2-fache der ersten Zeile zur dritten Zeile addieren. Dies ändert die Determinante nicht, so dass

$$\det A = \det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} = (-1) \cdot 1 \cdot [5^2 - (-2)^2] = -21.$$

Aufgabe 2 (*10 Punkte*)

(a) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{(3n+4)^n - 7^n}}{2n}$ ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (\ln(2n) - \ln(n+3))$ iii) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} \cdot \sin(1/x)$

(b) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^3}{3^n - 1}$ ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$ iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n + 2\sqrt{n}}}$

(c) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie den Betrag der folgenden komplexen Zahlen.

i) $\dfrac{2-3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$ ii) $\left(\dfrac{\mathrm{i}-\sqrt{3}}{2}\right)^{317}$

Lösung:

(a) i) Es ist

$$\frac{\sqrt[n]{(3n+4)^n - 7^n}}{2n} = \frac{(3n+4) \cdot \sqrt[n]{1 - \left(\frac{7}{3n+4}\right)^n}}{2n}.$$

Da

$$\frac{51}{100} \leqq 1 - \left(\frac{7}{3n+4}\right) \leqq 1$$

und $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$ für $c > 0$, ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(3n+4)^n - 7^n}}{2n} = \frac{3}{2}.$$

ii) Es ist wegen der Rechenregeln für den Logarithmus und der Stetigkeit der Logarithmusfunktion

$$\lim_{n\to\infty} \big(\ln(2n) - \ln(n+3)\big) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{2n}{n+3}\right) = \ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n+3}\right)\right) = \ln(2).$$

iii) Da $|\sqrt{x}| \cdot |\sin(1/x)| \leqq |\sqrt{x}|$, folgt sofort, dass $\lim_{x\to 0} \sqrt{x} \cdot \sin(x) = 0$.

(b) i) Da $\frac{2^n+n^3}{3^n-1} \leqq 2\frac{2^n}{3^n}$ für $n \geqq 4$ und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ konvergiert, ist auch die zu untersuchende Reihe nach dem Majorantenkriterium konvergent.

ii) Wir schreiben kurz $a_n = \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}$ und betrachten

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2\cdot 2^n(n+1)^2\cdot(n!)^2}{(2n+2)\cdot(2n+1)\cdot(2n)!}\cdot\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} = \frac{2n^2+4n+2}{4n^2+6n+2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} < 1.$$

Daher konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium.

iii) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+2\sqrt{n}}}$ ist eine monoton fallende Nullfolge. Daher konvergiert die Reihe nach dem Leibniz-Kriterium.

(c) i) Es ist

$$\left|\frac{2-3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}\right| = \frac{|2-3\mathrm{i}|}{|1+2\mathrm{i}|} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{65}.$$

Weiter haben wir

$$\frac{2-3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} = \frac{(2-3\mathrm{i})\cdot(1-2\mathrm{i})}{5} = -\frac{4}{5}-\frac{7}{5}\mathrm{i}.$$

ii) Da $\left|\frac{\mathrm{i}-\sqrt{3}}{2}\right| = 1$, ist auch

$$\left|\left(\frac{\mathrm{i}-\sqrt{3}}{2}\right)^{317}\right| = 1.$$

In Polardarstellung ist

$$\frac{\mathrm{i}-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\frac{5}{6}\pi\mathrm{i}}.$$

Dementsprechend ist

$$\left(\frac{\mathrm{i}-\sqrt{3}}{2}\right)^{317} = \mathrm{e}^{\frac{1585}{6}\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{32\cdot 2\pi\mathrm{i}+\frac{1}{6}\pi\mathrm{i}} = \underbrace{\left(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}\right)^{32}}_{=1^{32}}\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{6}\pi\mathrm{i}} = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

Aufgabe 3 (*10 Punkte*)

(a) Gegeben sei die Quadrik $Q = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, \mathbf{x}^\top A\mathbf{x} + 1 = 0\}$, wobei $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

i) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D sowie eine orthogonale Matrix T, so dass $A = TDT^\top$.

ii) Geben Sie die Art der Quadrik Q an.

(b) Es sei $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ der Raum der reellen Polynome vom Grad höchstens 2. Weiter sei die Basis $\mathcal{B} = (p_1, p_2, p_3)$ mit $p_1(x) = 1 + x^2$, $p_2(x) = 1 - x$ und $p_3(x) = 2x$ von $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ gegeben. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von $\varphi : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $p \mapsto p' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p$ bezüglich $\mathcal{B}$.

(c) Es sei $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^7$ eine lineare Abbildung mit $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{span}(e_1, e_4)$. Welche Dimension hat das Bild von φ?

Lösung:

(a) i) Zunächst bestimmen wir die Eigenwerte von A, indem wir das charakteristische Polynom aufstellen. Es ist

$$\det(A - \lambda I) = (2-\lambda) \cdot [(-1-\lambda)^2 - 1] = (2-\lambda) \cdot [\lambda^2 + 2\lambda] = (2-\lambda) \cdot (\lambda + 2) \cdot \lambda.$$

Es lassen sich leicht die Eigenwerte $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$ und $\lambda_3 = 0$ ablesen.

Im nächsten Schritt bestimmen wir die Eigenräume durch Lösen des homogenen linearen Gleichungssystems $(A - \lambda_j I)x = 0$ für $j = 1,2,3$ und erhalten als zugehörige (normierte) Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Damit ergeben sich die Transformationsmatrix

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

und die entsprechende Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ii) In den Koordinaten $y = Fx$ hat die Quadrik die Gleichung $2y_1^2 - 2y_2^2 + 1 = 0$. Daher handelt es sich um einen hyperbolischen Zylinder.

(b) Es ist

$$
\begin{aligned}
p_1'(x) &= 2x = 0 \cdot p_1(x) + 0 \cdot p_2(x) + 1 \cdot p_3(x),\\
p_2'(x) &= -1 = 0 \cdot p_1(x) + (-1) \cdot p_2(x) + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot p_3(x),\\
p_3'(x) &= 2 = 0 \cdot p_1(x) + 2 \cdot p_2(x) + 1 \cdot p_3(x).
\end{aligned}
$$

Damit ist die gesuchte Abbildungsmatrix gegeben durch

$$
{}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.
$$

(c) Es ist nach der Dimensionsformel

$$
\underbrace{\dim \mathbb{R}^5}_{=5} = \underbrace{\dim \operatorname{Ker}(\varphi)}_{=2} + \dim \operatorname{Bild}(\varphi),
$$

so dass das Bild von φ die Dimension 3 hat.

Aufgabe 4 (*10 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Vierecks mit den Kanten $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$, wobei $A = (1, 0, -2)$, $B = (3, 2, 0)$, $C = (2, 5, 7)$, $D = (-1, 1, 2)$.

(b) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene, die sowohl die Gerade $g = \{(2+t, 1-2t, 5+3t)^\top : t \in \mathbb{R}\}$ als auch die Gerade $h = \{(2-2t, 3+4t, -6t)^\top : t \in \mathbb{R}\}$ enthält.

(c) Bestimmen Sie die Innenwinkel des Dreiecks ABC mit $A = (0, 0)$, $B = (\sqrt{3} - 1, 0)$, $C = (-1, 1)$.

Lösung:

(a) Wir zerteilen das Viereck entlang der Diagonalen AC in zwei Teildreiecke ABC und ACD.

- Der Flächeninhalt von ABC ist dann gegeben durch

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\5\\9\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}8\\-16\\8\end{pmatrix}\right| = 4\left|\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right| = 4\sqrt{6}.$$

- Der Flächeninhalt von ACD ist gegeben durch

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}1\\5\\9\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}11\\-22\\11\end{pmatrix}\right| = \frac{11}{2}\sqrt{6}.$$

Damit ergibt sich der Flächeninhalt des Vierecks zu $\frac{19}{2}\sqrt{6}$.

(b) Es ist leicht zu sehen, dass g und h parallel sind, da die Richtungsvektoren Vielfache von $(1, -2, 3)^\top$ sind. Ein Punkt auf g ist $A = (2, 1, 5)$ und ein Punkt auf h ist $B = (2, 3, 0)$. Wenn die Ebene g und h enthalten soll, so muss $\overrightarrow{AB} = (0, 2, -5)^\top$ ein Spannvektor der Ebene sein. Dadurch gewinnen wir eine Parameterdarstellung der Ebene:

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, \vec{x} = (2, 3, 0)^\top + r \cdot (1, -2, 3)^\top + s \cdot (0, 2, -5)^\top,\, r, s \in \mathbb{R}\}.$$

Wir berechnen dann einen Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene durch

$$\vec{n} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}, \quad \text{mit } v = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\2\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix},$$

so dass $\vec{n} = \frac{1}{3\sqrt{5}}(4, 5, 2)^\top$.

Die Hessesche Normalform der Ebene lautet dann

$$\frac{4}{3\sqrt{5}}x_1 + \frac{1}{3}\sqrt{5}x_2 + \frac{2}{3\sqrt{5}}x_3 = \frac{23}{3\sqrt{5}}.$$

(c) Wir bezeichnen mit α, β bzw. γ die jeweiligen Innenwinkel bei A, B bzw. C.

- Es gilt

$$|\cos(\alpha)| = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} \sqrt{3}-1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{(\sqrt{3}-1)\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

  Durch geometrische Überlegungen ist klar, dass α ein stumpfer Winkel sein muss. Damit ist $\alpha = \frac{3}{4}\pi = 135°$.

- Es gilt

$$|\cos(\beta)| = \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{(\sqrt{3}-1)\cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

  Da α ein stumpfer Winkel ist, muss wegen der Winkelsumme im Dreieck gelten, dass β ein spitzer Winkel ist. Daher ist $\beta = \frac{1}{6}\pi = 30°$.

- Es muss gelten $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, so dass $\gamma = 15°$.

Aufgabe 5 (*10 Punkte*)

(a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-x}$. Bestimmen und klassifizieren Sie alle lokalen Extremstellen von f.

(b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Potenzreihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{7^n}{n!} (x-2)^n$$

Geben Sie den Wert der Reihe für $x = 4$ an.

(c) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die das folgende uneigentliche Integral konvergiert:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}(x^3+1)^{\alpha}} \,\mathrm{d}x$$

(d) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

i) $\displaystyle\int \frac{5x-4}{x^2-x-2} \,\mathrm{d}x$ ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \,\mathrm{d}x$

Lösung:

(a) Wir bestimmen zunächst die ersten beiden Ableitungen von f. Es ist

$$f'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} - x^2\mathrm{e}^{-x} = x(2-x)\mathrm{e}^{-x},$$
$$f''(x) = 2\mathrm{e}^{-x} - 2x\mathrm{e}^{-x} - 2x\mathrm{e}^{-x} + x^2\mathrm{e}^{-x} = (x^2-4x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

Es gilt $f'(x) = 0$ genau dann, wenn $x \in \{0, 2\}$. Einsetzen in die zweite Ableitung ergibt $f''(0) = 2 > 0$, so dass an der Stelle $x = 0$ ein lokales Minimum vorliegt. Hingegen ist $f''(2) = -2\mathrm{e}^{-2} < 0$, so dass an der Stelle $x = 2$ ein lokales Maximum vorliegt.

(b) Setzen wir $a_n = (-1)^n \frac{7^n}{n!}$, so ist

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{7^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{7^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{7}{n+1} = 0.$$

Damit ist der Konvergenzradius unendlich und die Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

Setzen wir $x = 4$ in die Reihe ein, ergibt sich

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{7^n}{n!} \cdot 2^n = \sum_{n=1} \frac{(-14)^n}{n!} = -1 + \sum_{n=0} \frac{(-14)^n}{n!} = -1 + \mathrm{e}^{-14}.$$

(c) Das Integral konvergiert genau dann, wenn die beiden Integrale

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha(x^3+1)^\alpha}\,\mathrm{d}x, \quad I_2 = \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha(x^3+1)^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

konvergieren.

- I_1 konvergiert genau dann, wenn $\alpha < 1$. Denn für $x \in (0,1]$ ist

$$\frac{1}{2^\alpha x^\alpha} \leqq \frac{1}{x^\alpha(x^3+1)^\alpha} \leqq \frac{1}{x^\alpha}$$

  und das Integral $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ konvergiert genau dann, wenn $\alpha < 1$.

- I_2 konvergiert genau dann, wenn $\alpha > \frac{1}{4}$. Denn für $x \geqq 1$ ist

$$\frac{1}{2^\alpha x^{4\alpha}} \leqq \frac{1}{x^\alpha(x^3+1)^\alpha} \leqq \frac{1}{x^{4\alpha}}$$

  und das Integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^{4\alpha}}\,\mathrm{d}x$ konvergiert genau dann, wenn $4\alpha > 1$ ist.

Insgesamt folgt also, dass $\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha(x^3+1)^\alpha}\,\mathrm{d}x$ genau dann konvergiert, wenn $\alpha \in \left(\frac{1}{4}, 1\right)$ ist.

(d) i) Wir führen eine Partialbruchzerlegung für den Integranden durch. Dazu faktorisieren wir den Nenner. Es ist

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1).$$

Damit ist ein Ansatz für eine Partialbruchzerlegung gegeben durch

$$\frac{5x-4}{x^2-x-2} \stackrel{!}{=} \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad A(x+1) + B(x-2) = 5x - 4.$$

Es ergibt sich damit $B = 3$ und $A = 2$. Damit ist

$$\int \frac{5x-4}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x-2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{3}{x+1}\,\mathrm{d}x = 2\ln|x-2| + 3\ln|x+1| + c.$$

ii) Wir führen die Substitution $y = x^2 + 1$ durch, so dass formal $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$ und somit $\mathrm{d}x = \frac{1}{2x}\mathrm{d}y$. Als neue untere Integralgrenze ergibt sich $0^2+1 = 1$ und als obere Grenze $1^2+1 = 2$. Damit haben wir

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y = [\sqrt{y}]_1^2 = \sqrt{2} - 1.$$

Aufgabe 6 (*10 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x} = x + 2\mathrm{e}^t.$$

(b) Bestimmen Sie diejenige Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x} = \mathrm{e}^x t,$$

für die gilt $x(0) = 2$.

(c) Bestimmen Sie Jacobi-Matrix der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x, y) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2 + 1} \\ x\mathrm{e}^y \\ y \end{pmatrix}$.

(d) Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x\mathrm{e}^{x-2y}$. Bestimmen Sie weiter das Taylor-Polynom zweiter Stufe zum Entwicklungspunkt $(x, y) = (2, 1)$.

Lösung:

(a) Hierbei handelt es sich um eine lineare inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung. Die zugehörige homogene Gleichung ist gegeben durch $\dot{x} = x$ und somit die allgemeine homogene Lösung $x_h(t) = c\mathrm{e}^t$, $c \in \mathbb{R}$.

Eine partikuläre Lösung finden wir nun durch Variation der Konstanten. Dazu machen wir den Ansatz $x_p(t) = c(t)\mathrm{e}^t$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert dann

$$c'(t)\mathrm{e}^t + c(t)\mathrm{e}^t \stackrel{!}{=} c(t)\mathrm{e}^t + 2\mathrm{e}^t \quad \Rightarrow \quad c'(t) = 2.$$

Damit ist eine partikuläre Lösung gegeben durch $y_p(t) = 2t\mathrm{e}^t$. Die allgemeine Lösung $x = x(t)$ ergibt sich als

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = (2t + c)\mathrm{e}^t, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(b) Hierbei handelt es sich um eine separierbare Differentialgleichung, die wir durch Trennung der Veränderlichen lösen. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} && \dot{x} &= \mathrm{e}^x t \\ \rightsquigarrow && \int \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \int t\,\mathrm{d}t \\ \rightsquigarrow && -\mathrm{e}^{-x} &= \frac{1}{2}t^2 + c \\ \rightsquigarrow && x(t) &= -\ln\left(-\tfrac{1}{2}t^2 - c\right). \end{aligned}$$

Einsetzen der Anfangsbedingung liefert dann

$$2 \overset{!}{=} -\ln(-c) \quad \Leftrightarrow \quad c = -\mathrm{e}^{-2}.$$

Damit ist die gesuchte Lösung gegeben durch $x(t) = -\ln\left(\mathrm{e}^{-2} - \frac{1}{2}t^2\right)$.

(c) Es ist

$$\mathrm{J}_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+1}} \\ \mathrm{e}^y & x\mathrm{e}^y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) Es ist

$$\begin{aligned} \partial_x f(x,y) &= (x+1)\mathrm{e}^{x-2y}, \\ \partial_y f(x,y) &= -2x\mathrm{e}^{x-2y}, \\ \partial_x^2 f(x,y) &= (x+2)\mathrm{e}^{x-2y}, \\ \partial_x\partial_y f(x,y) = \partial_y\partial_x f(x,y) &= -2(x+1)\mathrm{e}^{x-2y}, \\ \partial_y^2 f(x,y) &= 4x\mathrm{e}^{x-2y}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich das Taylorpolynom zweiter Stufe zum Entwicklungspunkt $(2,1)$ zu

$$T_2(f,(2,1)) = 2 + 3(x-2) - 4(y-1) + 2(x-2)^2 - 6(x-2)(y-1) + 4(y-1)^2.$$