Modulprüfung zur Mathematik für Informatiker und Softwaretechniker

Prof. Dr. W. Rump, Dr. E. Nava-Yazdani, K. Heil 21. Februar 2017

Korrekturhinweise:

- Es werden **nur volle Punkte** vergeben.
- Ist eine Punktzahl ≥ 2 nicht aufgeschlüsselt, so wird pro Fehler ein Punkt abgezogen.
- Wird mit einem falschen Zwischenergebnis richtig weitergerechnet, so können für die betreffenden Aufgabenteile alle möglichen Punkte vergeben werden (Folgefehlerregelung).

Aufgabe 1 (je 1 Punkt): Bestimmen Sie, ob die folgenden Aussagen zutreffen, indem Sie jeweils w (wahr) oder f (falsch) eintragen.

a) Für jedes Polynom p gilt $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\ln x}{x+p(x)}+\frac{p(x)}{x+e^x}\right)=0.$ $\boxed{\text{w}}$

b) Es gibt linear abhängige Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ in $\mathbb{R}^3$ mit $|\langle\vec{u},\vec{v}\rangle| \neq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$. $\boxed{\text{f}}$

c) Die Gleichung $x^5-4x+2=0$ besitzt mindestens eine Nullstelle im Intervall $(0,1)$. $\boxed{\text{w}}$

d) Die Richtungen der Vektoren $\vec{u},\vec{v}$ und $\vec{w}$ in $\mathbb{R}^3$ seien verschieden. Dann sind $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear unabhängig. $\boxed{\text{f}}$

e) Jede $n\times n$-Matrix mit n verschiedenen Eigenwerten ist diagonalisierbar. $\boxed{\text{w}}$

f) Die Summe der Glieder einer Nullfolge ist konvergent. $\boxed{\text{f}}$

g) Es gibt eine invertierbare Matrix mit Null als Eigenwert. $\boxed{\text{f}}$

h) Die Hesse-Matrix jeder zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ist symmetrisch. $\boxed{\text{w}}$

Aufgabe 2 (je 2 Punkte): Berechnen Sie:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+3n^2}{\sqrt{n^4+2n}} + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2^k-2}{3^k} \right) = \boxed{4}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x+\sin x}{x\ln(1+x)+\sin x} = \boxed{3}$

c) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} 3x\sqrt{1+x^2}\,dx = \boxed{7}$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x+y)\,dxdy = \boxed{-4}$

Aufgabe 3 (je 2 Punkte): Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie:

a) $\|Au - v\|^2 = \boxed{6}$

b) $\langle v - 3u, v\rangle = \boxed{2}$

Aufgabe 4 (je 2 Punkte): Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' - 4y' + 3y = 10\cos x\,.$$

a) Bestimmen Sie unter Verwendung des Lösungsansatzes $y_p = A\cos x + B\sin x$ eine partikuläre Lösung y_p der Differentialgleichung:

$$y_p = \boxed{\cos x - 2\sin x}$$

b) Bestimmen Sie die Lösung y der Differentialgleichung, die die Anfangsbedingungen $y(0) = 2$ und $y'(0) = -1$ erfüllt:

$$y = \boxed{e^x + \cos x - 2\sin x}$$

Aufgabe 5 (4+4 Punkte): Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = x^4 - 3x^2 - 4.$$

a) Berechnen Sie den Inhalt der eingeschlossenen Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse.

b) Die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei durch

$$g(x, y) = f(x) + \mathrm{e}^{xy}$$

definiert. Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix der Funktion g.

a) Reelle Nullstellen:
$x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \pm 2$

$$\text{Fläche } = \left| \int_{-2}^{2} x^4 - 3x^2 - 4dx \right| = \left| \left[\frac{1}{5}x^5 - x^3 - 4x \right]_{-2}^{2} \right| = \frac{96}{5}$$

b)

$$\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 6x + ye^{xy} \\ xe^{xy} \end{pmatrix}, \quad \text{Hesse-Matrix } = \begin{pmatrix} 12x^2 - 6 + y^2e^{xy} & (xy+1)e^{xy} \\ (xy+1)e^{xy} & x^2e^{xy} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 (2+6 Punkte): Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Funktion mit der Funktionsgleichung

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^3 + xy + 1 \\ 2xy + 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix Df der Funktion f.

b) Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch

$$g(x) = \langle f(x, x), f(0, 0) \rangle$$

definiert. Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen der Funktion f und geben Sie jeweils an, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt.

a)

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + y & x \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

b) $g(x) = x^3 + 3x^2 + 2$

$$g'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \quad \rightsquigarrow \quad -2 \text{ und } 0$$

$$g''(x) = 6x + 6$$

$$g''(-2) < 0 \quad \rightsquigarrow \quad \max$$

$$g''(0) > 0 \quad \rightsquigarrow \quad \min$$

Aufgabe 7 (je 2 Punkte): Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Transformieren Sie die Matrix A mittels Gauß-Algorithmus auf Dreiecksform.

b) Bestimmen Sie den Rang von A.

c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

d) Bestimmen Sie die Determinante von A.

e) Geben Sie eine Basis des Kerns der Matrix A an.

a) $$\begin{array}{ccc|} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \; Z_2 - 2Z_1 \implies \begin{array}{ccc|} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \; Z_3 - Z_1 \text{ dann } Z_2 \text{ und } Z_3 \text{ vertauschen} \implies \begin{array}{ccc|} 1 & 2 & 0 \\ 0 & \text{-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

b) Rang=2
c) Char. Poly.: $p(\lambda) = \lambda(1-\lambda)(\lambda-5)$ Eigenwerte $= 0$, 1 und 5
d) $\det(A) =$ (Produkt der Eigenwerte: oder) wegen Rang $\neq 3 \rightsquigarrow = 0$.
d) Jeder Vektor

$$s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $s \neq 0$