Modulprüfung zur Mathematik für Informatiker und Softwaretechniker

Prof. Dr. W. Rump, Dr. E. Nava-Yazdani, K. Heil 19. August 2016

Bitte unbedingt beachten:

- **Bearbeitungszeit: 120 Minuten**. Verlangt und gewertet werden **alle Aufgaben**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 10 eigenhändig beschriebene DIN A4–Seiten sowie Zeichenmaterial. Nicht erlaubt sind insbesondere Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengeräte.
- **Aufgaben 1-5:** Nur die Endergebnisse werden gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Lösungsweg und Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- **Aufgaben 6-7:** Alle Lösungswege und Begründungen sind anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht!
- Die folgenden Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte dürfen ohne Herleitung verwendet werden.

$f(x)$	x^a	$x\ln x - x$	$\sin x$	$\tan x$
$\frac{d}{dx}f(x)$	$a\,x^{a-1}$	$\ln x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x)$	e^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$
$\frac{d}{dx}f(x)$	e^x	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- In der Klausur können insgesamt maximal **50 Punkte** erreicht werden.
- Die **Prüfungsergebnisse** werden voraussichtlich bis zum 15. 9. 2016 an das Prüfungsamt übermittelt und können dann über das Online–Portal LSF abgefragt werden.
- Die Klausureinsicht findet am 14.10.2016 im Raum V57 8.122 statt.

  Viel Erfolg!

Name, Vorname: Matrikel–Nr. :

Aufgabe 1 (je 1 Punkt): Bestimmen Sie, ob die folgenden Aussagen zutreffen, indem Sie jeweils w (wahr) oder f (falsch) eintragen.

a) Die Ableitung einer rationalen Funktion ist eine rationale Funktion.

b) Es gibt ein $r \in \mathbb{R}$, mit $3 + 2i = re^{2i}$.

c) Die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ist über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.

d) Die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{p} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

besitzt für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ eine Lösung $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$.

e) Jede reelle symmetrische Matrix ist diagonalisierbar.

f) Die Gleichung $z = x^2 + y^2$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, beschreibt die Mantelfläche eines Kegels.

g) Für alle differenzierbaren Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gilt $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$.

h) Die Jacobi-Matrix einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist symmetrisch.

Aufgabe 2 (je 2 Punkte): Berechnen Sie:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln(1+n^2)}{\sqrt{n^4+1}}+\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{3^k}\right) =$ $\boxed{}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x}{x+3\sin x} =$ $\boxed{}$

c) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+3x}\,dx =$ $\boxed{}$

d) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx =$ $\boxed{}$

e) $\displaystyle\int_0^1\int_0^\pi x\sin y\,dydx =$ $\boxed{}$

Aufgabe 3 (je 2 Punkte): Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ die Funktion mit der Funktionsgleichung

$$f(x,y)=\begin{pmatrix}2x+xy\\3x^2+y\end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen die die Jacobi-Matrix Df der Funktion f:

$$Df(x,y)=\boxed{}$$

b) Es gibt eine Funktion $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ so, dass die Jacobi-Matrix von f an der Stelle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ genau dann invertierbar ist, wenn $y\neq g(x)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von g:

$$g(x)=\boxed{}$$

Aufgabe 4 (je 2 Punkte): Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = 1 + e^{x^2+y^2-2x}.$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten ∇f und die Hesse-Matrix Hf der Funktion f:

$$\nabla f(x,y) = \boxed{}\ , \quad Hf(x,y) = \boxed{}$$

b) Die Funktion f besitzt ein absolutes Minimum an der Stelle M. Bestimmen Sie:

$$M = \boxed{}$$

c) Bestimmen Sie das quadratische Taylorpolynom T_2 von f um die Entwicklungsstelle $(0,0)$:

$$T_2(x,y) = \boxed{}$$

Aufgabe 5 (je 2 Punkte): Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' - 4y' + 3y = 2\sin x - 4\cos x.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung y_h der zugehörigen homogenen Differentialgleichung:

$$y_h = \boxed{}$$

b) Eine partikuläre Lösung y_p der Differentialgleichung lautet:

$$y_p = \sin x.$$

Bestimmen Sie die Lösung y der Differentialgleichung, die die Anfangsbedingungen $y(0) = 2$ und $y'(0) = 5$ erfüllt:

$$y = \boxed{}$$

Aufgabe 6 (3 +6 Punkte): In $V = \mathbb{R}^3$ seien die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie den Winkel α, den die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ miteinander einschließen.

b) Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ spannen einen zweidimensionalen Unterraum $U \subset V$ auf. Ergänzen Sie $\vec{e} = \|\vec{a}\|^{-1}\,\vec{a}$ zu einer Orthonormalbasis von U.

Aufgabe 7 (3 + 6 Punkte): Gegeben sei die Matrix

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von H.

b) Bestimmen Sie eine Basis aus Eigenvektoren von H.