Universität Stuttgart
Fachbereich Mathematik

Prof Dr F. Witt

HM 3 aer/mawi

Modulprüfung

01.03.2017

Name:

Matrikel-Nr.:

Studiengang:

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	Σ	Note
Punkte:								

Hinweis:

- Auf dieser Klausur sind maximal 66 Punkte zu erreichen.
- Als Hilfsmittel sind ausschließlich fünf eigenhändig und doppelseitig beschriebene DIN-A4 Blätter zugelassen.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Die Klausureinsicht ist voraussichtlich in der ersten Vorlesungswoche. Den genauen Termin finden Sie zeitnah auf der ILIAS Seite zur Vorlesung.
- Die Klausurergebnisse werden über das LSF bekannt gegeben.

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.**

Lösen Sie die folgenden kurzen Aufgaben.

a) *Parametrisieren Sie den Ellipsoiden*

$$K = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1 \}.$$

Ersetzen Sie hierfür die Platzhalter ? und $*$ sinnvoll.

$$\Phi(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} x(\varphi,\theta) \\ y(\varphi,\theta) \\ z(\varphi,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ ?\,\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ * \end{pmatrix}.$$

b) *Lösen Sie für $u(x,y) = y^2 + \cos(x)$ das Anfangswertproblem $y(0) = 1$ und*

$$\frac{\partial u}{\partial y} y' + \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

c) *Sie werfen einunddreißig mal mit einer fairen Münze. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für höchstens fünfzehn mal Kopf?*

d) *Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:*

$$y' = \frac{e^{-y}}{2}\cos(x), \quad y(0) = 1.$$

e) *Bestimmen Sie das Gleichungssystem der Charakteristiken $(x(t), y(t))$ der partiellen Differentialgleichung*

$$y\frac{\partial u}{\partial x} + e^x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Lösungsvorschlag

a) Wir schreiben die Gleichung um:

$$x^2 + (2y)^2 + (3z)^2 = 1\ .①$$

So sehen wir, dass die Gleichung verlangt, dass die Punkte $(x, 2y, 3z)$ auf dem Rand der dreidimensionalen Einheitskugel liegen müssen. Da Letztere bekanntlich durch

$$(\cos(\varphi)\cos(\theta), \sin(\varphi)\cos(\theta), \sin(\theta))$$

mit $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ parametrisiert wird, hat man $? = \frac{1}{2}$ und $* = \frac{1}{3}\sin(\theta)$ zu ergänzen .①

b) Es handelt sich um eine exakte Differentialgleichung. Auflösen von $u(x,y) = c$ nach y ergibt

$$y(x) = \pm\sqrt{c - \cos(x)}\ \ ①$$

Aufgrund der Anfangsbedingung entscheiden wir uns für das positive Vorzeichen und $c = 2$. Wegen $\cos(x) \leq 1$ ist der Term unter der Wurzel dann positiv und die Lösung

daher auf $\mathbb{R}$ definiert. ①
Alternativ, etwas umständlicher: Wegen $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$ und $\frac{\partial u}{\partial x} = -\sin(x)$ ist die DG ebenfalls separierbar. Mit $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ erhalten wir

$$2y\mathrm{d}y = \sin(x)\mathrm{d}x \quad ①$$

Aufintegrieren liefert

$$2\int_{y_0=1}^{y} t\mathrm{d}t = \int_{x_0=0}^{x} \sin(t)\mathrm{d}t$$

Stammfunktion von $2t$ ist t^2. Stammfunktion von $\sin(t)$ ist $-\cos(t)$ (wen wundert's, man integriert ja die partiellen Ableitungen von u wieder auf) Daher

$$y^2 - 1 = -\cos(x) + 1 \quad ①$$

Auflösen nach y ergibt wie zuvor $y = \sqrt{2 - \cos(x)}$ mit $x \in \mathbb{R}$.

c) Es gibt genau so viele Möglichkeiten höchstens 15 mal Kopf zu werfen, wie dies nicht zu tun: Letzteres bedeutet nämlich, dass man mindestens 16 mal Kopf wirft, d.h. höchstens $31 - 16 = 15$ Mal Zahl. ①
Da die Münze zudem fair ist, ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit also $\frac{1}{2}$. ①

d) Die Differentialgleichung ist separierbar: Separation der Variablen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-y}}{2}\cos(x) \;\Rightarrow\; e^y\,dy = \frac{1}{2}\cos(x)\,dx \;\Rightarrow\; \int_{y_0=1}^{y} e^z\,dz = \frac{1}{2}\int_{x_0=0}^{x}\cos(t)\,dt \quad ①$$

und damit

$$e^y - e = \frac{1}{2}\sin(x)\;. ①$$

Da $\frac{1}{2}\sin(x)$ stets stets größer als $-e$ ist,① können wir den Logarithmus ziehen und nach y auflösen:

$$y(x) = \ln(\frac{1}{2}\sin(x) + e)$$

ist auf ganz Re definiert. ①
Alternativ: die DG ist exakt mit Potential $u(x,y) = e^y - \frac{\sin(x)}{2}$. Wegen der Anfangsbedingung muss also $u(x,y) \equiv u(0,1) = e$ gelten. Also ist $e^y = \frac{\sin(x)}{2} + e$, was man wie zuvor nach y auflösen kann.

e) Das System der Charakteristiken lautet

$$\dot{x}(t) = y(t) \quad ①$$
$$\dot{y}(t) = e^{x(t)} \quad ①$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.**

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der folgenden Differentialgleichung:

$$y'' - y' - 2y = 2x + e^{2x}.$$

Lösungsvorschlag In einem ersten Schritt löst man die homogene Gleichung $y''-y'-2y=0$. Das charakteristische Polynom p dieser Differentialgleichung lautet

$$p = X^2 - X - 2 = (X-2)(X+1) \quad ①$$

und hat die Nullstellen 2 und -1 .① Also lautet die allgemeine homogene Lösung f_h:

$$f_h(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$$

mit $c_1, c_2 \in \text{Re}$. ②

In einem zweiten Schritt bestimmt man nun irgendeine beliebige (partikuläre) Lösung der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung – und zwar entweder durch einen Ansatz nach Art der rechten Seite (Variante 1), durch Variation der Konstanten (Variante 2) oder mit Hilfe der Greenschen Lösungsformel (Variante 3)

Variante 1: partikuläre Lösung durch Ansatz nach Art der rechten Seite
Aufgrund des Superpositionsprinzips bekommt man eine partikuläre Lösung f_p von $y''-y'-2y = 2x+e^{2x}$, indem man eine partikuläre Lösung $f_{p\,1}$ von $y''-y'-2y = 2x = h_1(x)$ und eine partikuläre Lösung $f_{p\,2}$ von $y''-y'-2y = e^{2x} = h_2(x)$ bestimmt und diese beiden addiert: $f_p = f_{p\,1} + f_{p\,2}$.

- Zunächst zu $y''-y'-2y = 2x = h_1(x)$! Weil 0 keine Nullstelle von p ist (keine Resonanz), machen wir den Ansatz

  $$f_{p\,1}(x) = (ax+b)\,x^0\,e^{0x} = ax+b. \quad ①$$

  Setzt man diesen Ansatz in die Differentialgleichung ein, so erhält man

  $$0 - a - 2(ax+b) = h_1(x) = 2x.$$

  Also $a=-1$ und $b=\frac{1}{2}$ (Koeffizientenvergleich!) und damit $f_{p\,1}(x) = -x+\frac{1}{2}$.①

- Jetzt zu $y''-y'-2y = e^{2x} = h_2(x)$! Weil 2 eine einfache Nullstelle von p ist (Resonanz), machen wir den Ansatz

  $$f_{p\,2}(x) = c\,x^1\,e^{2x} = cxe^{2x}. \quad ①$$

  Zweimaliges Ableiten ergibt

  $$f'_{p\,2}(x) = (c+2cx)e^{2x},$$
  $$f''_{p\,2}(x) = (4c+4cx)e^{2x}. \quad ①$$

  Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so erhält man

  $$e^{2x} = h_2(x) = \big(4c+4cx-c-2cx-2cx\big)e^{2x} = 3ce^{2x}$$

  und damit $c=\frac{1}{3}$. Also $f_{p\,2}(x) = \frac{1}{3}xe^{2x}$. ①

Insgesamt erhalten wir $f_p(x) = f_{p\,1}(x) + f_{p\,2}(x) = -x + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}xe^{2x}$.

Variante 2: partikuläre Lösung durch Variation der Konstanten
Die Wronskimatrix $M(x)$ zu f_1, f_2 und deren Inverse $M(x)^{-1}$ lauten:

$$M(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{-x} \\ 2e^{2x} & -e^{-x} \end{pmatrix}, \quad M(x)^{-1} = \frac{1}{\det M(x)} \operatorname{adj}(M(x)) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-2x} \\ 2e^{x} & -e^{x} \end{pmatrix}. \ ①$$

Aufgrund eines Satzes aus der Vorlesung ist eine partikuläre Lösung gegeben durch $f_p(x) = c_1(x)f_1(x) + c_2(x)f_2(x)$, wobei c_1, c_2 Funktionen sind so, dass

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = M(x)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ h(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-2x} \\ 2e^{x} & -e^{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2x + e^{2x} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2xe^{-2x} \\ -e^{3x} - 2xe^{x} \end{pmatrix}. \ ①$$

Also gilt (mit Integrationskonstanten $c_{1\,0}$, $c_{2\,0}$):

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}xe^{-2x} - \frac{1}{6}e^{-2x} + c_{1\,0}, \\ c_2(x) &= -\frac{1}{9}e^{3x} - \frac{2}{3}xe^{x} + \frac{2}{3}e^{x} + c_{2\,0} \ ② \end{aligned}$$

(partielle Integration!). Wählt man die Integrationskonstanten $c_{1\,0}$, $c_{2\,0}$ beide gleich 0, so erhält man eine partikuläre Lösung f_p mit

$$\begin{aligned} f_p(x) = c_1(x)f_1(x) + c_2(x)f_2(x) &= \frac{1}{3}xe^{2x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{6} - \frac{1}{9}e^{2x} - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \\ &= -\frac{1}{9}e^{2x} - x + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}xe^{2x}. \ ① \end{aligned}$$

(Diese partikuläre Lösung unterscheidet sich von der in Variante 1 durch die Lösung $x \mapsto -\frac{1}{9}e^{2x}$ der homogenen Gleichung. Durch entsprechend andere Wahl der Integrationskonstanten $c_{0\,1}, c_{0\,2}$ erhält man die partikuläre Lösung aus Variante 1.)

Variante 3: partikuläre Lösung nach der Greenschen Formel
Zunächst suchen wir die Lösung $u(x)$ der homogenen DG, für die $u(0) = 0$ und $u'(0) = 1$ gilt. Diese findet man durch Koeffizienten-Vergleich aus dem Fundamentalsystem, das zuvor bestimmt wurde:

$$u(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-x}.$$

Aus $y(0) = 0$ folgt $c_1 = -c_2$ und damit

$$u(x) = c(e^{2x} - e^{-x}), \ u'(x) = c(e^{2x} + e^{-x})$$

Daher $c = \frac{1}{3}$. ①

Nun können wir $y(x)$ berechnen. Mir gehen nach dem selben Superpositionsprinzip vor, welches wir schon in ersten Lösungsmethode verwendet hatten. Zunächst die Rechte Seite

$b_1(t) = 2t$: Einsetzen in die Greensche Lösungsformel ergibt

$$
\begin{aligned}
y(x) = &\quad \frac{1}{3}\int_{t=0}^{x}(e^{2(x-t)} - e^{-(x-t)})b_1(t))dt \\
= &\quad \frac{2}{3}\int_{t=0}^{x} t\,e^{2(x-t)} - t\,e^{t-x}dt \\
= &\quad \frac{2}{3}\int_{t=0}^{x} t\,e^{2\,x}e^{-2\,t} - t\,e^{t}e^{-x}dt \\
= &\quad \frac{2}{3}e^{2\,x}\int_{t=0}^{x} t\,e^{-2\,t}dt - \frac{2}{3}e^{-x}\int_{0}^{x} t\,e^{t}dt \quad ①
\end{aligned}
$$

wobei die letzte Zeile benutzt dass x als Konstante zu sehen ist, wenn wir bezüglich der Variable t integrieren. Stammfunktion von $t\,e^{-2\,t}$ ist $\frac{-1}{4}(2\,t+1)e^{-2\,t}$. Stammfunktion von $t\,e^{t}$ ist $t\,e^{t} - e^{t}$. Daher

$$
\begin{aligned}
y(x) = &\quad \frac{-1}{6}e^{2\,x}[e^{-2\,t}(2\,t+1)]_0^x - \frac{2}{3}e^{-x}[(t-1)e^{t}]_0^x dt \\
= &\quad \frac{-1}{6}(2x+1) - \frac{2}{3}(x-1) + \text{Terme, welche die homogene DG lösen} \\
= &\quad -x + \frac{1}{2} + \text{Terme, die die homogene DG lösen} \quad ①
\end{aligned}
$$

Eine spezielle Lösung der DG mit rechter Seite $b_1(t)$ ist daher $y_1(x) = -x + \frac{1}{2}$. Probe:

$$y_1'' - y_1' - 2y_1 = 1 - 2(-x + \frac{1}{2}) = 2\,x$$

Jetzt für die Rechte Seite $b_2(x) = e^{2\,x}$:

$$
\begin{aligned}
y(x) = &\quad \frac{1}{3}\int_{t=0}^{x}(e^{2(x-t)} - e^{-(x-t)})b_2(t))dt \\
= &\quad \frac{1}{3}\int_{t=0}^{x} e^{2(x-t)} - e^{t-x})e^{2\,t}dt \\
= &\quad \frac{1}{3}\int_{t=0}^{x} e^{2\,x} - e^{3\,t}e^{-x}dt \\
= &\quad \frac{1}{3}e^{2\,x}\int_{t=0}^{x} dt - \frac{1}{3}e^{-x}\int_{0}^{x} e^{3\,t}dt \\
= &\quad \frac{1}{3}xe^{2\,x} + \text{Terme, die die homogene DG lösen} \quad ①
\end{aligned}
$$

Eine Lösung der DG mit rechter Seite $b_2(x)$ ist daher $y_2(x) = \frac{1}{3}xe^{2\,x}$. Probe:

$$
\begin{aligned}
y_2' &= \frac{1}{3}(1+2x)e^{2\,x} \\
y_2'' &= \frac{4}{3}(1+x)e^{2\,x} \\
y_2'' - y_2' - 2y_2 &= \frac{1}{3}(4 + 4x - 1 - 2x - 2x)e^{2\,x} = e^{2\,x}
\end{aligned}
$$

Spezielle Lösung der DG mit rechter Seite $2\,x + e^{2\,x}$ ist daher

$$y_s(x) = \frac{1}{3}x\,e^{2\,x} - x + \frac{1}{2}. \quad ①$$

In einem dritten und letzten Schritt muss man schließlich noch die oben bestimmte allgemeine homogene Lösung und die oben bestimmte partikuläre Lösung addieren:

$$\begin{aligned} f(x) &= f_h(x) + f_p(x) = f_h(x) + f_{p\,1}(x) + f_{p\,2}(x) \\ &= c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} - x + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} x e^{2x} \quad (c_1, c_2 \in \mathrm{Re}), \quad ① \end{aligned}$$

um die gesuchte allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu bekommen.

Aufgabe 3 (9 Punkte).

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$y' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix} y.$$

Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems zur Anfangsbedingung

$$v = y(0) = (1, 0, 0)^T$$

.

Lösungszkizze: Das charakteristischen Polynoms:

$$q(\lambda) = det(A - \lambda E) = \lambda^3 - 3\lambda - 2 \quad ①$$

Dessen Nulllstellen sind bekanntlich die Eigenwerte der Matrix A:

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = -1. \quad ②$$

Als nächstes bestimmt man die Eigenwerte indem man das lineare Gleichungssystem $(A - \lambda_k E) = 0$ löst. Dadurch erhält man die Eigenvektoren:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .②$$

(Daraus ergibt sich das Fundamentalsystem

$$f_1(x) = e^{2x} v_1, \; f_2(x) = e^{-x} v_2, \; f_3(x) = e^{-x} v_3$$

Und die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^{2x} \\ 1e^{2x} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-x} \\ 0 \\ e^{-x} \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-x} \\ e^{-x} \end{pmatrix} \quad ①$$

Um die Lösung zum Anfangswertproblem zu bestimmen löst man das LGS $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ das durch

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

gegeben ist und erhält

$$c = (1, 1, -2)^T \quad ②$$

und damit

$$y(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ 2e^{-x} - 2e^{2x} \\ e^{-x} - e^{2x} \end{pmatrix} \quad ①$$

Aufgabe 4 (11 Punkte).

Es ist die 2π*-periodische Funktion* f *mit*

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) - 1, & x \in [-\pi, 0) \\ 1 + \sin(x), & x \in [0, \pi) \end{cases} \qquad \text{und} \qquad f(x + 2\pi) = f(x)$$

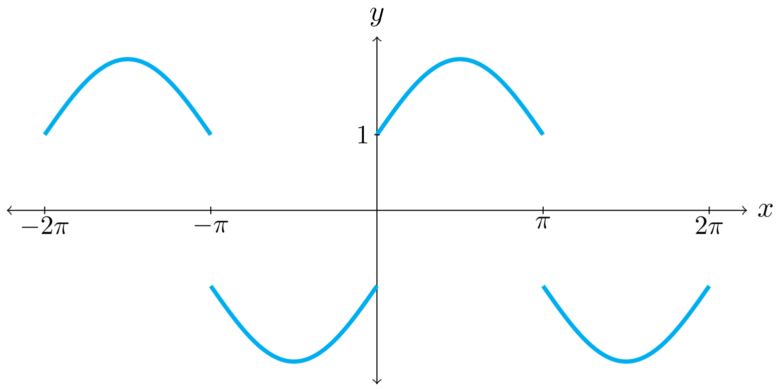
gegeben.

a) *Skizzieren Sie* f *auf dem Intervall* $[-2\pi, 2\pi)$.

b) *Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von* f.

c) *Bestimmen Sie für alle* $x \in \mathbb{R}$ *den Grenzwert der Fourierreihe.*

Lösungsskizze



a) ②

b) (1) Weil $f(x)$ ungerade ist, gilt $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. ②

(2) Wir schreiben f als Summe $f(x) = \sin(x) + g(x)$ mit

$$g(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-\pi, 0) \\ 1, & x \in [0, \pi) \end{cases} \qquad \text{und} \qquad f(x + 2\pi) = f(x) \quad ①$$

Die Koeffizienten b_n für g berechnen sich wie folgt:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx \quad ① \\ &= \frac{2}{\pi} [-\frac{\cos(nx)}{n}]_0^{\pi} \\ &= \frac{2\,(1 - (-1)^n)}{n\pi} \quad ① \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$b_n = \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & n \text{ ungerade} \\ 0, & n \text{ gerade} \end{cases} \quad ①$$

(3) Die Fourierreihe von f ist

$$
\begin{aligned}
f(x) &\sim \left(\frac{4}{\pi}+1\right)\sin(x)+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2\,(1-(-1)^n)}{n\pi}\sin(nx) \quad ①\\
&= \left(\frac{4}{\pi}+1\right)\sin(x)+\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{4}{(2\ell+1)\pi}\sin((2\ell+1)x)
\end{aligned}
$$

c) Die Funktion f ist stetig differenzierbar in den Intervallen $(n\pi-\pi, n\pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$ mit endlichen links- bzw. rechtseitigen Grenzwerten sowohl für f als auch f' in allen Punkten $\{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Da die Funktion f insbesondere stetig ist in $(n\pi-\pi, n\pi)$ $(n \in \mathbb{Z})$, konvergiert die Fourierreihe in diesem Bereich also gegen $f(x)$. ①

In den Punkten $\{n\pi | n \in \mathbb{Z}\}$ hingegen macht f einen Sprung der Höhe 2, sodass sich der Grenzwert dort berechnet als

$$
\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to n\pi+0} f(x)+\lim_{x\to n\pi-0} f(x)\right)=0. \quad ①
$$

Aufgabe 5 (12 Punkte)**.**

Wir betrachten den Körper

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq 8 - z^3, 0 \leq z \leq 2\}.$$

Der Rand ∂K besteht aus dem Boden

$$B := \{(x, y, z) \in K | z = 0\}$$

und dem Mantel

$$M := \{(x, y, z) \in K | x^2 + y^2 = 8 - z^3\}.$$

Weiter sei f das Vektorfeld

$$f(x, y, z) := \begin{pmatrix} -xz \\ yz \\ x^2 + y \end{pmatrix}.$$

a) *Skizieren Sie den Körper K und seine Randkomponenten B und M.*

b) *Parametrisieren Sie den den Mantel M mit Hilfe von Zylinderkoordinaten.*

c) *Berechnen Sie den Fluss von f durch den Boden B nach Außen.*

d) *Berechnen Sie die Divergenz von f.*

e) *Schließen Sie ohne erneute Rechnung auf den Fluss von f durch den Mantel M nach Außen.*

Lösungsvorschlag

a) Der Boden ist eine Kreisscheibe vom Radius $\sqrt{8}$.① Der Mantel ist ein rundlich zugespitzer Kegel, dessen Spitze bei $(x = 0, y = 0, z = 2)$ liegt .①

b) Mit der Abbildung

$$g(r, \varphi) = (r\,\cos(\varphi), r\,\sin(\varphi), \sqrt[3]{8 - r^2}) \quad ①$$

wobei $r \in [0, \sqrt{8}]$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$ ① erhalten wir eine Parametrisierung von M.

c) Der Fluss von f durch B nach Außen ist

$$\int_B f \cdot n_B \mathrm{d}B = -\int_0^{2\pi} \int_0^{2\sqrt{2}} (r^2 \cos^2(\varphi) + r \sin(\varphi)) r \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \quad ②$$

$$= -\int_0^{2\pi} \int_0^{2\sqrt{2}} \cos^2(\varphi) r^3 \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi$$

Dabei verschwindet der Sinusterm, da über $[0, 2\pi]$ integriert wird. ①Weiter ergibt die Integration von $\cos^2$ über ein Intervall, dessen Länge ein Vielfaches von π ist, die halbe Intervall-Länge. ① Also

$$\int_B f \cdot n_B \mathrm{d}B = -\pi \int_0^{\sqrt{8}} r^3 \mathrm{d}r = -\frac{\pi}{4} [r^4]_0^{\sqrt{8}} = -16\pi \quad ①$$

d) Wir haben $div(f) = -z + z = 0$. ①

e) Nach dem Satz von Gauß ① ist der Ausfluss von f aus dem Körper heraus gleich Null. Daher

$$\int_M f \cdot n_M \mathrm{d}M = -\int_B f \cdot n_B \mathrm{d}B = 16\pi. \quad ①$$

Aufgabe 6 (12 Punkte).

Auf einer Oberfläche befindet sich eine große Bakterienpopulation. Die einzelnen Bakterien sind zufällig und unabhängig von einander auf der Fläche verteilt. Wir gehen davon aus, dass die Anzahl der Bakterien, die Sie mit dem Mikroskop auf einem genügend kleinen Flächenausschnitt beobachten, poissonverteilt ist. Im Durchschnitt sehen Sie auf einer Fläche von einem Quadratmillimeter zwei Bakterien.

a) *Bestimmen Sie die Parameter μ_1 und μ_2 der Poissonverteilungen der Anzahlen von Bakterien, die Sie auf Flächenausschnitten der Größen $1\,mm^2$ und $2\,mm^2$ beobachten.*

b) *Mit welcher Wahrscheinlichkeit beobachten Sie auf einem Ausschnitt von zwei Quadratmillimetern mindesten zwei Bakterien? Runden Sie auf eine ganze Prozentzahl.*

c) *Welcher Wahrscheinlichkeitsverteilung genügt die Fläche, die Sie absuchen müssen, um die erste Bakterie zu finden? Wieviel Fläche müssen Sie im Mittel absuchen, um auf die erste Bakterie zu stoßen?*

Sie entdecken auf der selben Oberfläche zusätzlich eine neue Sorte von Bakterien, deren Anzahl ebenfalls poissonverteilt sei und die unabhängig von der ersten Sorte vorkommt. Im Durchschnitt sehen Sie auf einem Ausschnitt von einem Quadratmillimeter drei Bakterien der neuen Sorte.

d) *Welcher Wahrscheinlichkeitsverteilung genügt die Gesamtzahl der Bakterien, die Sie auf einem Ausschnitt von einem Quadratmillimeter vorfinden? Mit welcher Wahrscheinlichkeit sehen Sie dort höchstens zwei Bakterien? Runden Sie auf eine ganze Prozentzahl.*

Lösungsvorschlag

a) Es ist $\mu_1 = 2$ ①und $\mu_2 = 4$.②

b) Für $\mu = 4$ ist nach Tabelle $p_4(X \leq 1) = 1.83\% + 7.33\% = 9.16\%$.② Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist die Gegenwahrscheinlickeit $p_A \cong 91\%$.①

c) Diese ist exponentialverteilt zum selben Parameter $\mu = 2$ mit Mittelwert $1/\mu = 1/2$. ① Die mittlere Suchfläche ist daher ein halbes Quadratmillimeter .①

d) Die Gesamtzahl an Bakterien pro Quadratmillimeter genügt einer Poissonverteilung zum Parameter $2 + 3 = 5$. ②Dort befindet sich mit einer Wahrscheinlichkeit $p_5(X \leq 2) = 0.67\% + 3.37\% + 8.42\% \cong 12\%$ höchstens zwei Bakterien. ②