Institut für Geometrie und Topologie
Universität Stuttgart

Prof. Dr. W. Kimmerle

Höhere Mathematik III Diplomvorprüfung 1. September 2003

1. Klausur

für Studierende der Fachrichtungen **bau, immo**

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120** Minuten. Verlangt und gewertet werden **alle Aufgaben**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 25 handbeschriebene DIN A4–Blätter sowie Zeichenmaterial. Nicht erlaubt sind insbesondere Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengeräte.
- Bei den **Aufgaben 1 und 2** sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitung separate Blätter.
- Bei den **Aufgaben 3 und 4** sind nur die Ergebnisse verlangt. Tragen Sie diese in die dafür vorgesehenen Felder auf den Aufgabenblättern ein.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem ??. 10. 2003 im NWZ II, Pfaffenwaldring 57, 7. Stock, durch Aushang bekanntgegeben.

  VIEL ERFOLG!!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, und bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich bis zum ??. 10. 2003 in Raum V57.7.346 einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (15 Punkte)

Der Zylinder $x^2 + y^2 = 1$ schneidet die Fläche $z = xy$ in einer Kurve C.

a) Bestimmen Sie mit der Methode von Lagrange die Punkte auf C mit minimalen und maximalen z–Werten, das heißt die höchsten und die tiefsten Punkte auf C.

b) Parametrisieren Sie C und lösen Sie die Aufgabe direkt.

Aufgabe 2 (15 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle nicht-trivialen Lösungen der partiellen Differentialgleichung

$$y_{xx} = y_{tt} + 2y_t$$

welche die Form

$$y(x,t) = \sin(nx) \cdot w(t)$$

haben.

b) Geben Sie eine Lösung aus **a)** an, welche zusätzlich die Anfangsbedingung

$$y(x,0) = x \quad \text{für } 0 \leq x < \pi$$

erfüllt.

Name: $\boxed{}$ **Mat.-Nr.:** $\boxed{}$

Aufgabe 3 (15 Punkte) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$p(x,y)dx + q(x,y)\mathrm{d}y = (5x^3 - 4x^2y)dx + (5x^2y - 4x^3)\mathrm{d}y = 0$$

Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen p_y und q_x.

$$p_y = \boxed{}\,, \quad q_x = \boxed{}$$

Die Differentialgleichung besitzt einen nur von einem Parameter abhängigen integrierenden Faktor. Der Parameter ist: x ◯, y ◯.

Welche Differentialgleichung muss der integrierende Faktor erfüllen?

$$\mu'/\mu = \boxed{}\,.$$

Geben Sie einen integrierenden Faktor an:

$$\mu = \boxed{}\,.$$

Geben Sie die allgemeine Lösung in der Form $F(x,y) = k$ =konstant an:

$$F(x,y) = \boxed{} = k$$

Die Lösungskurven sind Ellipsen. Geben Sie die Richtungen r_1 und r_2 der Hauptachsen sowie das Verhältnis a_1/a_2 der Hauptachsenlängen an:

$$r_1 = \boxed{}\,, \quad r_2 = \boxed{}\,, \quad \frac{a_1}{a_2} = \boxed{}\,.$$

Aufgabe 4 (15 Punkte) TODO – Alte Version:

Im $\mathbb{R}^3$ sei der Körper M, der durch den Graph S der Funktion $f(x,y) = 6 - \sqrt{x^2+y^2+16}$ und der Ebene E mit der Gleichung $z = 1$ eingeschlossen wird, gegeben. Die Kurve K sei gegeben durch $S \cap E$.

Das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$g: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x^2 + y \\ z^2 - 3y \\ 2xz - y \end{pmatrix}.$$

Skizzieren Sie den Schnitt von M mit der Ebene $y = 0$: $\boxed{}$

Der nach außen weisende Normaleneinheitsvektor von ∂M in $(-1, 0, 1)$ ist: $\boxed{}$.

$\mathrm{rot} g = \boxed{}$, $\quad \mathrm{div} g = \boxed{}$.

Eine Parametrisierung $v(t)$ der Kurve K lautet $\boxed{}$.

Ergänzen Sie das Dreifach–Integral so, dass es das Volumen von M beschreibt:

$$\int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \boxed{} \, \mathrm{d}\boxed{} \, \mathrm{d}\boxed{} \, \mathrm{d}\boxed{}$$

Das Volumen von M ist $\boxed{}$.

$\iint_{\partial M} g \cdot n \, \mathrm{d}O = \boxed{}$ (Hierbei sei n der nach außen weisende Normaleneinheitsvektor.)

Schreiben Sie nach dem Satz von Stokes $\left|\int_K g \, \mathrm{d}x\right|$ als Oberflächenintegral und berechnen Sie es.

$$\left|\int_K g \mathrm{d}x\right| = \left| \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \boxed{} \, \mathrm{d}\boxed{} \, \mathrm{d}\boxed{} \right| = \boxed{}$$