Universität Stuttgart

PD Dr. W.-P. Düll
Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Klausur

für Studierende der Fachrichtungen
inf, swt

Bitte unbedingt beachten:

- Bitte beschriften Sie jeden Ihrer Zettel mit Namen und Matrikelnummer.
- Legen Sie Ihren Studentenausweis gut sichtbar vor sich auf den Tisch.
- Verwenden Sie **keinen Bleistift oder Rotstift.**
- **Taschenrechner, Mobiltelefone etc. sind nicht zugelassen.**
- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 10 eigenhändig beschriebene DIN-A4 Seiten.
- Bei den **Aufgaben 1, 5, 6, 7 und 9** sind die vollständigen Argumentationsschritte anzugeben. Bei den **Aufgaben 2, 3, 4 und 8** wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt, Nebenrechnungen werden hier nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- In dieser Klausur können bis zu **50 Punkte** erreicht werden.
- Nach der Klausur legen Sie bitte Ihre beschriebenen Blätter in den gefalteten Umschlagbogen hinein.
- Wann die Prüfungsergebnisse vorliegen, wird auf der Homepage der Vorlesung bekanntgegeben.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*5 Punkte*) Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$\text{Für jedes } n \in \mathbb{N} \text{ gilt } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Aufgabe 2 (*6 Punkte*) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^4 - 16 = 0.$$

Geben Sie die Lösungen sowohl in der Form $z = re^{i\varphi}, r \in (0, \infty), \varphi \in [0, 2\pi)$ als auch in der Form $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$ an:

$$z_1 = \boxed{\quad} e^{i\boxed{\quad}} = \boxed{\quad} + \boxed{\quad}\, i, \qquad z_2 = \boxed{\quad} e^{i\boxed{\quad}} = \boxed{\quad} + \boxed{\quad}\, i,$$

$$z_3 = \boxed{\quad} e^{i\boxed{\quad}} = \boxed{\quad} + \boxed{\quad}\, i, \qquad z_4 = \boxed{\quad} e^{i\boxed{\quad}} = \boxed{\quad} + \boxed{\quad}\, i.$$

Aufgabe 3 (*1+2 Punkte*) Gegeben sei die reelle Matrix:

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 2 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix B_α in Abhängigkeit von α:

$\det(B_\alpha) = \boxed{\qquad\qquad\qquad}$

b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das homogene lineare Gleichungssystem $B_\alpha x = 0$ nicht-triviale Lösungen $x \in \mathbb{R}^3$?

$\alpha = \boxed{\qquad\qquad\qquad}$

Aufgabe 4 (*2+6 Punkte*) Gegeben sei die reelle Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ von A an:

$$\chi_A(\lambda) = \boxed{}$$

b) Geben Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der Matrix A und jeweils einen zugehörigen Eigenvektor v_1, v_2, v_3 an:

$$\lambda_1 = \boxed{} \qquad \lambda_2 = \boxed{} \qquad \lambda_3 = \boxed{}$$

$$v_1 = \boxed{} \qquad v_2 = \boxed{} \qquad v_3 = \boxed{}$$

Aufgabe 5 (*1+2+2 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{a)} \lim_{n\to\infty} \frac{1-n^3}{3n^3-n} \qquad \text{b)} \lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{x} \qquad \text{c)} \lim_{x\to\infty} x \sin\frac{1}{x}$$

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Aufgabe 6 (*2+3 Punkte*) Gegeben sei die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{4n-1}}.$$

a) Entscheiden Sie, ob die Reihe konvergiert, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

b) Ist die Reihe absolut konvergent? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Aufgabe 7 (*2+4 Punkte*)

a) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x\sin(x)$.

b) Entscheiden Sie, ob das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \frac{(e^x-1)^2}{x^2\sqrt{x}} dx$$

konvergiert, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Aufgabe 8 (*1+1+2+2 Punkte*) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = xy - x + y^3.$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten von f.

$\nabla f(x, y) =$

b) Bestimmen Sie den (einzigen) stationären Punkt von f.

$P_1 : (x_1, y_1) =$

c) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von f.

$H_f(x, y) =$

d) Bestimmen Sie für den stationären Punkt von f, ob f dort ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder einen Sattelpunkt besitzt. Geben Sie eine mathematische Begründung für Ihre Entscheidung.

Die Funktion f besitzt ein(en) in P_1.

Mathematische Begründung:

Aufgabe 9 (*2+2+2 Punkte*) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie eine kurze Begründung. Ohne Begründung gibt es für die Angabe “Wahr” oder “Falsch” keine Punkte. Bei falschen Antworten gibt es keine Minuspunkte.

a) Jedes reelle, quadratische Polynom lässt sich in reelle Linearfaktoren zerlegen.

b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Gilt $f(x) \geqq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann ist jede Stammfunktion von f monoton wachsend.

c) Gegeben seien $n \in \mathbb{N}$, eine quadratische, reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und die zugehörige transponierte Matrix A^T. Dann ist die Matrix $A^T + A$ symmetrisch und diagonalisierbar.

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.