Universität Stuttgart

PD Dr. W.-P. Düll
Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Klausur

für Studierende der Fachrichtungen

inf, swt

Bitte unbedingt beachten:

- Bitte beschriften Sie jeden Ihrer Zettel mit Namen und Matrikelnummer.
- Legen Sie Ihren Studentenausweis gut sichtbar vor sich auf den Tisch.
- Verwenden Sie **keinen Bleistift oder Rotstift.**
- **Taschenrechner, Mobiltelefone etc. sind nicht zugelassen.**
- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 10 eigenhändig beschriebene DIN-A4 Seiten.
- Bei den **Aufgaben 1, 5, 6, 7 und 9** sind die vollständigen Argumentationsschritte anzugeben. Bei den **Aufgaben 2, 3, 4 und 8** wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt, Nebenrechnungen werden hier nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- In dieser Klausur können bis zu **50 Punkte** erreicht werden.
- Nach der Klausur legen Sie bitte Ihre beschriebenen Blätter in den gefalteten Umschlagbogen hinein.
- Wann die Prüfungsergebnisse vorliegen, wird auf der Homepage der Vorlesung bekanntgegeben.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe 1 (5 *Punkte*) Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$\text{Für jedes } n \in \mathbb{N} \text{ gilt } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Lösung: Zu zeigen:

$$A(n) : \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

- 'Induktionsanfang':

$$A(1) : \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{1+1} \text{ ist wahr.}$$

- 'Induktionsschritt': Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} A(n) \text{ ist Wahr } \Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &\overset{A(n)}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{(n+1)+1} \end{aligned}$$

$\Rightarrow A(n+1)$ ist Wahr.

- 'Induktionsschluss': Nach dem Induktionsprinzip gilt dann:

$$A(n) \text{ ist wahr } n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 2 (6 *Punkte*) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^4 - 16 = 0.$$

Geben Sie die Lösungen sowohl in der Form $z = re^{i\varphi}, r \in (0, \infty), \varphi \in [0, 2\pi)$ als auch in der Form $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$ an:

$$z_1 = \boxed{2}\, e^{i\boxed{0}} = \boxed{2} + \boxed{0}\, i, \qquad z_2 = \boxed{2}\, e^{i\boxed{\frac{\pi}{2}}} = \boxed{0} + \boxed{2}\, i,$$

$$z_3 = \boxed{2}\, e^{i\boxed{\pi}} = \boxed{-2} + \boxed{0}\, i, \qquad z_4 = \boxed{2}\, e^{i\boxed{\frac{3\pi}{2}}} = \boxed{0} + \boxed{-2}\, i.$$

Aufgabe 3 (*1+2 Punkte*) Gegeben sei die reelle Matrix:

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 2 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix B_α in Abhängigkeit von α:

$$\det(B_\alpha) = \boxed{-2\alpha(2+\alpha) \text{ or } -4\alpha - 2\alpha^2}$$

b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das homogene lineare Gleichungssystem $B_\alpha x = 0$ nicht-triviale Lösungen $x \in \mathbb{R}^3$?

$$\alpha = \boxed{0, -2}$$

Aufgabe 4 (*2+6 Punkte*) Gegeben sei die reelle Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ von A an:

$$\chi_A(\lambda) = \boxed{(1-\lambda)((4-\lambda)(1-\lambda)+2) \text{ or } (1-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+6)}$$

b) Geben Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der Matrix A und jeweils einen zugehörigen Eigenvektor v_1, v_2, v_3 an:

$$\lambda_1 = \boxed{1} \qquad \lambda_2 = \boxed{2} \qquad \lambda_3 = \boxed{3}$$

$$v_1 = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad v_2 = \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}} \qquad v_3 = \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 5 (*1+2+2 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty} \frac{1-n^3}{3n^3-n} \qquad \text{b) } \lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{x} \qquad \text{c) } \lim_{x\to\infty} x \sin\frac{1}{x}$$

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Lösung: Wir berechnen (unter Verwendung der Regel von de l'Hospital bei Teilaufgabe b und c):

$$\text{a)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{1-n^3}{3n^3-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3}-1}{3-\frac{1}{n^2}} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{b)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{x} \overset{\text{`}\frac{0}{0}\text{'}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\left(1+\tan^2(2x)\right)}{1} = 2$$

$$\text{c)}\ \lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} \overset{x=\frac{1}{y}}{=} \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin(y)}{y} \overset{\text{`}\frac{0}{0}\text{'}}{=} \lim_{y\to 0^+} \frac{\cos(y)}{1} = \cos(0) = 1$$

Aufgabe 6 (*2+3 Punkte*) Gegeben sei die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{4n-1}}.$$

a) Entscheiden Sie, ob die Reihe konvergiert, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Lösung: Es gilt

$$0 < \sqrt{4n-1} \leqq \sqrt{4(n+1)-1} \quad\Longrightarrow\quad 0 < \frac{1}{\sqrt{4(n+1)-1}} \leqq \frac{1}{\sqrt{4n-1}},$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist die Folge $\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{4n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ alternierend und monoton fallend. Es gilt außerdem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{4n-1}} = 0.$$

Also konvergiert die Reihe nach dem Leibniz-Kriterium.

b) Ist die Reihe absolut konvergent? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Lösung: Es gilt

$$0 < \sqrt{4n-1} \leqq \sqrt{4n} \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{\sqrt{4n-1}} \geqq \frac{1}{\sqrt{4n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \geqq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n},$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Die harmonische Reihe

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

divergiert. Also divergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n-1}},$$

nach dem Minoranten-Kriterium. Damit konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{4n-1}}$ nicht absolut.

Aufgabe 7 *(2+4 Punkte)*

a) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x\sin(x)$.
Lösung: Durch Partielle Integration ergibt sich:

$$\int x\sin(x)dx = -x\cos(x) + \int \cos(x)dx = -x\cos(x) + \sin(x) + C,$$

mit $C \in \mathbb{R}$.

b) Entscheiden Sie, ob das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \frac{(e^x-1)^2}{x^2\sqrt{x}}dx$$

konvergiert, und begründen Sie Ihre Entscheidung.
Lösung: Wir zeigen dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(e^x-1)^2}{x^2} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases},$$

stetig ist. Die Funktion f ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, weil f durch Multiplikation, Addition und Division aus den stetigen Elementärfunktionen $x \mapsto e^x, x \mapsto x$ und $x \mapsto 1$ entsteht und für den Nenner x^2 gilt $x^2 \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zunächsts zeigen wir dass f auch stetig ist in 0, d.h. $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Es gilt $e^x - 1 = x + \mathcal{O}(x^2)$ nach Taylor's Satz. Also wir berechnen

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)^2}{x^2} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}\right)^2 = 1 = f(0).$$

Wir konkludieren dass f stetig ist auf $\mathbb{R}$. Damit ist f begrenzt auf $[0,1]$ durch eine Konstante $C > 0$ nach dem Satz vom Maximum und Minimum. Wir begrenzen

$$\frac{(e^x-1)^2}{x^2\sqrt{x}} \leqq \frac{C}{\sqrt{x}}, \qquad x \in (0,1].$$

Das Integral

$$\int_0^1 \frac{C}{\sqrt{x}}dx = [2C\sqrt{x}]_0^1 = 2C,$$

konvergiert und damit konvergiert

$$\int_0^1 \frac{(e^x-1)^2}{x^2\sqrt{x}}dx,$$

nach dem Majoranten-Kriterium.

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Aufgabe 8 (*1+1+2+2 Punkte*) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = xy - x + y^3.$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten von f.

$\nabla f(x,y) =$ $\boxed{(y-1, x+3y^2)}$

b) Bestimmen Sie den (einzigen) stationären Punkt von f.

$P_1 : (x_1, y_1) =$ $\boxed{(-3, 1)}$

c) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von f.

$$H_f(x,y) = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 6y \end{pmatrix}}$$

d) Bestimmen Sie für den stationären Punkt von f, ob f dort ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder einen Sattelpunkt besitzt. Geben Sie eine mathematische Begründung für Ihre Entscheidung.

Die Funktion f besitzt ein(en) $\boxed{\text{Sattelpunkt}}$ in P_1.

Mathematische Begründung:

Wir berechnen $\det(H_f(-3,1)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -1 < 0$. Nach dem Hurwitz-Kriterium besitzt f einen Sattelpunkt in $P_1 = (-3, 1)$.

Aufgabe 9 (*2+2+2 Punkte*) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie eine kurze Begründung. Ohne Begründung gibt es für die Angabe "Wahr" oder "Falsch" keine Punkte. Bei falschen Antworten gibt es keine Minuspunkte.

a) Jedes reelle, quadratische Polynom lässt sich in reelle Linearfaktoren zerlegen.

b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Gilt $f(x) \geqq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann ist jede Stammfunktion von f monoton wachsend.

c) Gegeben seien $n \in \mathbb{N}$, eine quadratische, reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und die zugehörige transponierte Matrix A^T. Dann ist die Matrix $A^T + A$ symmetrisch und diagonalisierbar.

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Lösung:

a) Falsch. Das quadratische Polynom $p(x) = x^2 + 1$ hat keine reellen Nullstellen, weil es keine $x \in \mathbb{R}$ gibt mit $-1 = x^2 \geqq 0$. Damit lässt p sich nicht in Linearfaktoren zerlegen.

b) Wahr. Sei $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Es gilt $F'(x) = f(x) \geqq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Also ist F monoton wachsend.

c) Wahr. Es gilt $(A^T + A)^T = A^{TT} + A^T = A^T + A$. Damit ist $A^T + A$ symmetrisch und symmetrische Matrizen sind diagonalisierbar.