# Klausur zur Höheren Mathematik III

## für die Fachrichtung: phys, kyb, mecha

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 3 eigenhändig handbeschriebene DIN-A4-Blätter.
  Insbesondere sind elektronische Hilfsmittel nicht erlaubt.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- **Alle Aufgaben** zählen.
- Bei **allen Aufgaben** sind sämtliche Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen bereitgestellte Extrablätter und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab **11. April 2017** über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

**Hinweise für Wiederholer:**

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, werden voraussichtlich ab dem **11. April 2017** nähere Informationen bezüglich der mündlichen Nachprüfung auf der Homepage zu HM III–Haasdonk

`https://ilias3.uni-stuttgart.de/goto_Uni_Stuttgart_crs_1088458.html`

finden.

Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

**Aufgabe 1 (Mehrdimensionale Integration)** **2 + 4 + 4 = 10 Punkte**

**(a)** Berechnen Sie den Wert des folgenden Doppelintegrals

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin(y)} e^{\cos(y)} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

**(b)** Bestimmen Sie den Flächeninhalt $O(F)$ der Fläche $F$ gegeben durch

$$F := \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 |\, z = 2xy + 1 \text{ und } x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

**(c)** Für $R, l > 0$ sei $Z \subset \mathbb{R}^3$ der Zylinder gegeben durch

$$Z := \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 |\, (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq R^2 \text{ und } -\frac{l}{2} \leq z \leq \frac{l}{2}\right\}.$$

Berechnen Sie das Trägheitsmoment $\Theta_g$ bezüglich der Drehachse

$$g := \left\{(1,-1,z)^T \in \mathbb{R}^3 | z \in \mathbb{R}\right\},$$

wobei die Dichte $\rho : Z \to \mathbb{R}$ konstant 1 ist. d.h. $\rho(x,y,z) = 1$ für alle $(x,y,z)^T \in Z$.

**Aufgabe 2 (Integralsätze)** **1 + 4 = 5 Punkte**

Sei $E \subset \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$E := \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 + z^2 \leq 1\right\}$$

und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$f(x,y,z) := \begin{pmatrix} x\left(\frac{1}{12}x^2 + y^2\right) \\ \frac{1}{4}x^2 y - \frac{2}{9}y^3 \\ z\left(z^2 + \frac{1}{4}x^2\right) \end{pmatrix}.$$

**(a)** Berechnen Sie $\mathrm{div}(f)$.

**(b)** Es bezeichne $n$ den äußeren Normaleneinheitsvektor von $\partial E$. Berechnen Sie das Integral

$$\oint\limits_{\partial E} \langle f, n\rangle \,\mathrm{d}o.$$

**Aufgabe 3 (Differentialgleichungen)** **1 + 1 + 1 + 2 + 3 + 2 = 10 Punkte**

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$y_1' = ay_1 - y_2 + 2e^{at}, \qquad y_2' = y_1 + ay_2 + 2e^{at}, \tag{1}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$.

**(a)** Schreiben Sie das System (1) in der Form $y' = Ay + b(t)$, mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $b(t), y(t) \in \mathbb{R}^2$.

**(b)** Ist das System (1) autonom?

**(c)** Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ ist das homogene System $y' = Ay$ asymptotisch stabil?

**(d)** Geben Sie ein Fundamentalsystem reeller Lösungen des homogenen Systems $y' = Ay$ an.

**(e)** Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems (1) mit Anfangsbedingung $y(0) = (1, 0)^T$.

**(f)** Gegeben sei das skalare Anfangswertproblem $y''(t) + 4y(t) = \sin(2t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Sei $Y = \mathcal{L}(y)$. Geben Sie die Laplace-Transformation dieser Gleichung an und lösen Sie nach $Y$ auf.

### Aufgabe 4 (Fourier-Reihe) **4 + 4 + 2 = 10 Punkte**

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als die $2\pi$-periodische Fortsetzung der Funktion $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$,

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \pi] \\ t & \text{falls } t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{cases}.$$

**(a)** An welchen Stellen $t \in [-\pi, \pi]$ konvergiert die Fourierreihe von $f$? Gegen welchen Wert konvergiert die Fourierreihe an diesen Stellen jeweils?

**(b)** Berechnen Sie die reellen Fourierkoeffizienten $a_k$ und $b_k$ von $f$.
**Hinweis:** Vereinfachen Sie soweit wie möglich, insbesondere bis keine trigonometrischen Funktionen mehr auftreten.

**(c)** Berechnen Sie $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$, wenn $c_k$ die komplexen Fourierkoeffizienten von $f$ bezeichnen.

### Aufgabe 5 (Partielle Differentialgleichung) **1 + 4 = 5 Punkte**

Wir betrachten die partielle Differentialgleichung

$$u_t = u_{xx} - u \qquad (t \in \mathbb{R}, x \in [0, \pi]). \tag{2}$$

**(a)** Ist diese partielle Differentialgleichung elliptisch, parabolisch, hyperbolisch oder von gemischtem Typ?

**(b)** Setzen Sie den Ansatz

$$u(x,t) = v(x)w(t) \quad \text{mit} \quad 0 \not\equiv v \in C^2([0,\pi], \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad 0 \not\equiv w \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \tag{3}$$

in (2) ein und bestimmen Sie damit gewöhnliche Differentialgleichungen für $v$ und $w$ und deren allgemeine reelle Lösungen.

**Aufgabe 6 (Holomorphe Funktionen)** **2 + 1 + 2 = 5 Punkte**

**(a)** Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, in welchen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := \bar{z}\,|z|^2$ komplex differenzierbar ist.

**(b)** Sei $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, sodass $g(z) = -1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 3$. Bestimmen Sie $g(2)$.

**(c)** Sei $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, sodass $h(z) \to 0$ für $|z| \to \infty$. Zeigen Sie, dass dann bereits $h(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

**Aufgabe 7 (Residuen)** **5 + 1 + 4 = 10 Punkte**

**(a)** Sei $f(z) := \frac{1}{(z^2+1)(z+2)^2}$. Bestimmen Sie die Residuen $\operatorname{Res}(f, z_k)$ für alle Polstellen $z_k$ von $f$, und berechnen Sie

$$\int_{\partial B_2(1)} f(z)\,\mathrm{d}z \qquad \text{sowie} \qquad \int_{\partial B_2(1)} \frac{1}{(z+2)^2}\,\mathrm{d}z.$$

**(b)** Sei $f$ wie in Aufgabenteil (a). Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Taylorreihe von $f$ mit Entwicklungspunkt 1.

**(c)** Berechnen Sie den Wert des uneigentlichen Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x.$$

**Aufgabe 8 (Differentialgleichung höherer Ordnung)** **2 + 3 = 5 Punkte**

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y^{(3)}(t) - 3y''(t) + 2y'(t) = e^{2t} + e^{-t}.$$

**(a)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

**(b)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.