Aufgabe 1 (Mehrdimensionale Integration) **2 + 4 + 4 = 10 Punkte**

(a) Berechnen Sie den Wert des folgenden Doppelintegrals

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin(y)} e^{\cos(y)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

(b) Gegeben sei die Fläche

$$F := \left\{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = 2xy + 1 \text{ und } x^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

Bestimmen Sie den Flächeninhalt $O(F)$ der Fläche F.

(c) Für $R, l > 0$ sei $Z \subset \mathbb{R}^3$ der Zylinder gegeben durch

$$Z := \left\{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq R^2 \text{ und } -\frac{l}{2} \leq z \leq \frac{l}{2} \right\}.$$

Berechnen Sie das Trägheitsmoment Θ_g bezüglich der Drehachse

$$g := \left\{ (1,-1,z)^T \in \mathbb{R}^3 | z \in \mathbb{R} \right\},$$

wobei die Dichte $\rho : Z \to \mathbb{R}$ konstant 1 ist. d.h. $\rho(x,y,z) = 1$ für alle $(x,y,z)^T \in Z$.

Lösung:

(a) Wir integrieren zunächst nach x:

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin(y)} e^{\cos(y)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2} \sin(y) e^{\cos(y)} \, \mathrm{d}y.$$

Wir substituieren nun mit $u = \cos(y)$, wodurch wir als neue Grenzen 1 bzw. 0 und als Funktionaldeterminante $-\sin(y)$ erhalten. Es ergibt sich somit

$$\int_0^{\pi/2} \sin(y) e^{\cos(y)} \, \mathrm{d}y = \int_1^0 -e^u \, \mathrm{d}u = - \left. e^u \right|_1^0 = e - 1.$$

(b) F lässt sich schreiben als Graph der Funktion $\varphi : D := \left\{ (x,y)^T \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1 \right\} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x,y) = 1 + 2xy$. Nach Satz 1.32 gilt somit für den Flächeninhalt

$$O(F) = \int_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) \right)^2} \, \mathrm{d}(x,y).$$

Für die partiellen Ableitungen ergibt sich

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = 2y \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = 2x,$$

wodurch wir

$$O(F) = \int_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} \, \mathrm{d}(x,y)$$

erhalten. Durch einen Wechsel in Polarkoordinaten ergibt sich

$$O(F) = \int_D \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(x,y) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = 2\pi \int_0^1 r\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r.$$

Durch die Substitution $s = 1+4r^2$ (d.h. "$\mathrm{d}s = 8r\,\mathrm{d}r$") erhalten wir letztlich

$$O(F) = 2\pi \int_0^1 r\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4}\int_1^5 \sqrt{s}\,\mathrm{d}s = \frac{\pi}{4}\frac{2}{3}\,s^{\frac{3}{2}}\Big|_1^5 = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right).$$

Alternativ kann auch eine Parametrisierung der Fläche bestimmt werden: Es ist $p : [0,1]\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$p(r,\phi) = \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \\ 2r^2\cos(\phi)\sin(\phi)+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \\ r^2\sin(2\phi)+1 \end{pmatrix}$$

Für die partiellen Ableitungen ergibt sich

$$\frac{\partial p}{\partial r}(r,\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 2r\sin(2\phi) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial p}{\partial \phi}(r,\phi) = \begin{pmatrix} -r\sin(\phi) \\ r\cos(\phi) \\ 2r^2\cos(2\phi) \end{pmatrix}.$$

der Normalenvektor ergibt sich nun mittels des Kreuzpordukts

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r}\times\frac{\partial p}{\partial \phi}\right)(r,\phi) = \begin{pmatrix} 2r^2(\cos(2\phi)\sin(\phi)-\sin(2\phi)\cos(\phi)) \\ -2r^2(\sin(2\phi)\sin(\phi)+\cos(2\phi)\sin(2\phi)) \\ r \end{pmatrix}$$

und somit

$$\left\|\left(\frac{\partial p}{\partial r}\times\frac{\partial p}{\partial \phi}\right)(r,\phi)\right\| = r\sqrt{1+4r^2}.$$

Die Oberfläche berechnet sich nun mittels

$$O(F) = \int\limits_{[0,1]\times[0,2\pi]} \left\|\left(\frac{\partial p}{\partial r}\times\frac{\partial p}{\partial \phi}\right)(r,\phi)\right\|\,\mathrm{d}(r,\phi) = \int\limits_{[0,1]\times[0,2\pi]} r\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}(r,\phi).$$

Der Rest verläuft wie oben.

(c) Gemäß Definition 1.22 ist das Trägheitsmoment gegeben durch

$$\Theta_g = \int_Z \rho(x,y,z)r_g(x,y,z)^2\,\mathrm{d}(x,y,z),$$

wobei $r_g(x,y,z)$ den Abstand des Punktes $(x,y,z)^T$ zur Drehachse g bezeichnet. In unserem Fall gilt:

$$r_g(x,y,z)^2 = (x-1)^2+(y+1)^2.$$

Somit

$$\Theta_g = \int_Z \rho(x,y,z)r_g(x,y,z)^2\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_Z (x-1)^2+(y+1)^2\,\mathrm{d}(x,y,z).$$

Wir führen nun eine Koordinatentransformation mit verschobenen Zylinderkoordinaten durch. Sei dazu $\phi : D := [0, R] \times [0, 2\pi] \times [-l/2, l/2] \to Z$ mit

$$\phi(r, \varphi, z) := \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) + 1 \\ r\sin(\varphi) - 1 \\ z \end{pmatrix}.$$

Damit

$$J\phi(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix},$$

also

$$|\det(J\phi(r, \varphi, z))| = r.$$

Mit dem Transformationssatz (Satz 1.24) ergibt sich

$$\begin{aligned}
\Theta_g &= \int_Z (x-1)^2 + (y+1)^2 \, \mathrm{d}(x, y, z) \\
&= \int_D (r\cos(\varphi) + 1 - 1)^2 + (r\sin(\varphi) - 1 + 1)^2 r \, \mathrm{d}(r, \varphi, z) \\
&= \int_D r^3 \, \mathrm{d}(r, \varphi, z) \\
&= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-l/2}^{l/2} r^3 \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{2}\pi l R^4.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Integralsätze) **1 + 4 = 5 Punkte**

Sei $E \subset \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$E := \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 + z^2 \leq 1 \right\}$$

und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$f(x, y, z) := \begin{pmatrix} x\left(\frac{1}{12}x^2 + y^2\right) \\ \frac{1}{4}x^2 y - \frac{2}{9}y^3 \\ z\left(z^2 + \frac{1}{4}x^2\right) \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $\operatorname{div}(f)$.

(b) Es bezeichne n den äußeren Normaleneinheitsvektor von ∂E. Berechnen Sie das Integral

$$\oint_{\partial E} \langle f, n \rangle \, \mathrm{d}o.$$

Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\partial_x f(x,y,z) &= \frac{1}{4}x^2 + y^2, \\
\partial_y f(x,y,z) &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{3}y^2, \\
\partial_z f(x,y,z) &= \frac{1}{4}x^2 + 3z^2
\end{aligned}$$

und somit

$$\operatorname{div}(f)(x,y,z) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{3}y^2 + 3z^2 = 3\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 + z^2\right).$$

(b) Die Voraussetzungen des Satzes von Gauß (Satz 1.44) sind erfüllt und es gilt demnach

$$\oint_{\partial E} \langle f, n\rangle \, \mathrm{d}o = \int_E \operatorname{div}(f)(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z).$$

Wir führen nun eine Koordinaten Transformation durch.
Sei dazu $B := \left\{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})^T \in \mathbb{R}^3 | \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 \leq 1\right\}$
und $\phi : B \to E$, $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})^T \mapsto (2\bar{x}, 3\bar{y}, \bar{z})^T$. Nach dem Transformations (Satz 1.24) folgt nun

$$\int_E \operatorname{div}(f)(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_B \operatorname{div}(f)(\phi(\bar{x},\bar{y},\bar{z}))|\det(J\phi(\bar{x},\bar{y},\bar{z}))|\,\mathrm{d}(\bar{x},\bar{y},\bar{z}).$$

Mit

$$\operatorname{div}(f)(\phi(\bar{x},\bar{y},\bar{z})) = 3\left(\frac{1}{4}(2\bar{x})^2 + \frac{1}{9}(3\bar{y})^2 + \bar{z}^2\right) = 3\left(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2\right)$$

und

$$\det(J\phi(\bar{x},\bar{y},\bar{z})) = \det\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 6$$

erhalten wir

$$\int_E \operatorname{div}(f)(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_B 18\left(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2\right)\,\mathrm{d}(\bar{x},\bar{y},\bar{z}).$$

Letztlich führen wir nun noch eine Transformation in Kugelkoordinaten durch:

$$\begin{aligned}
\int_B 18\left(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2\right)\,\mathrm{d}(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) &= 18\int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2 \cdot r^2 \sin(\theta)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \\
&= 36\pi \underbrace{\left(\int_0^1 r^4\,\mathrm{d}r\right)}_{=\frac{1}{5}} \underbrace{\left(\int_0^\pi \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\right)}_{=2} \\
&= \frac{72}{5}\pi.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (Differentialgleichungen) **$1 + 1 + 1 + 2 + 3 + 2 = 10$ Punkte**

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$y_1' = ay_1 - y_2 + 2e^{at}, \qquad y_2' = y_1 + ay_2 + 2e^{at}, \tag{1}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$.

(a) Schreiben Sie das System (1) in der Form $y' = Ay + b(t)$, mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $b(t), y(t) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Ist das System (1) autonom?

(c) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ ist das homogene System $y' = Ay$ asymptotisch stabil?

(d) Geben Sie ein Fundamentalsystem reeller Lösungen des homogenen Systems $y' = Ay$ an.

(e) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems (1) mit Anfangsbedingung $y(0) = (1, 0)^T$.

(f) Gegeben sei das skalare Anfangswertproblem $y''(t) + 4y(t) = \sin(2t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Sei $Y = \mathcal{L}(y)$. Geben Sie die Laplace-Transformation dieser Gleichung an und lösen Sie nach Y auf.

Lösung:

(a) Das System (1) kann mit $y := (y_1, y_2)^\top$ geschrieben werden als

$$y' = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} y + e^{at}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = Ay + b(t) \quad \text{mit} \quad A := \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b(t) := e^{at}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Weil (1) von der Form $y' = f(t, y)$ ist und $t \mapsto f(t, y) := Ay + b(t)$ nichtkonstant ist für ein (alle) $y \in \mathbb{R}^2$, ist (1) nichtautonom.

(c) Aufgrund von Satz 3.32 (Charakterisierung der asymptotischen Stabilität linearer autonomer Systeme) ist das homogene System $y' = Ay$ asymptotisch stabil genau dann, wenn alle Eigenwerte von A negativen Realteil haben. Weil nun die Eigenwerte von A gegeben sind durch

$$a + i \qquad \text{und} \qquad a - i$$

ist das homogene System asymptotisch stabil genau dann, wenn $\mathrm{Re}(a) < 0$.

(d) Weil

$$A = aI + J \qquad \text{mit} \qquad I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und J offensichtlich mit I (Einheitsmatrix!) vertauscht, gilt nach Satz 3.27 (Eigenschaften des Matrixexponentials)

$$e^{At} = e^{aIt}e^{Jt} = e^{at}e^{Jt}.$$

Weiter gilt nach Aufgabe 9.2

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

(Drehung um $0 \in \mathbb{R}^2$ um den Winkel t). Alternativ kann man mit Aufgabe 9.2 das Matrixexponential e^{At} auch direkt ausrechnen – in dieser Aufgabe wurde nämlich $e^{\tilde{A}t}$ berechnet mit $\tilde{A} := \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Aufgrund von Satz 3.29 (Zusammenhang zwischen Matrixexponential und Fundamentalsystemen) bilden die Spalten von

$$e^{At} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{at}\cos(t) & -e^{at}\sin(t) \\ e^{at}\sin(t) & e^{at}\cos(t) \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem des homogenen Systems $y' = Ay$. Alternativ kann man auch Satz 3.20 anwenden. Zunächst ist $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit Eigenwerten $a \pm i \notin \mathbb{R}$. Weiter ist ein Eigenvektor v von $A = aI + J$ zu $a + i$ gegeben durch

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \alpha + i\beta \qquad \text{mit} \qquad \alpha := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad \beta := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Aufgrund von Satz 3.20 ist ein Fundamentalsystem des homogenen Systems $y' = Ay$ daher gegeben durch

$$\begin{aligned} &\left\{ e^{at}\big(\alpha\cos(t) - \beta\sin(t)\big), e^{at}\big(\alpha\sin(t) + \beta\cos(t)\big) \right\} \\ &= \left\{ e^{at} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, e^{at} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

(e) Aufgrund von Korollar 3.33 ist die Lösung y des zu (1) gehörigen Anfangswertproblems mit Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ mit $y_0 := (1, 0)^\top$ gegeben durch

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{At} y_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} b(s)\, \mathrm{d}s \\ &= e^{at} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + e^{at} \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(t-s) & -\sin(t-s) \\ \sin(t-s) & \cos(t-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{d}s \\ &= e^{at} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + 2e^{at} \begin{pmatrix} -\sin(t-s) - \cos(t-s) \\ \cos(t-s) - \sin(t-s) \end{pmatrix} \Bigg|_{s=0}^{s=t} \\ &= e^{at} \begin{pmatrix} 3\cos(t) + 2\sin(t) - 2 \\ 3\sin(t) - 2\cos(t) + 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(f) Sei y die (eindeutig existierende!) Lösung des Anfangswertproblems $y''(t) + 4y(t) = \sin(2t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Dann ist y von exponentieller Ordnung nach Satz 6.9 (Lösung skalarer linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und mit quasipolynomieller Inhomogenität). Aufgrund von Satz 2.52 und 2.53 (Rechenregeln für Laplace-Transformation) und von Beispiel 2.54 ($\mathcal{L}(\sin)(s) = 1/(1+s^2)$) gilt also:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\big(y'' + 4y\big)(s) &= s\mathcal{L}(y')(s) - y'(0) + 4\mathcal{L}(y)(s) = s\big(s\mathcal{L}(y)(s) - y(0)\big) - y'(0) + 4\mathcal{L}(y)(s)\\ &= s^2Y(s) - 1 + 4Y(s)\end{aligned}$$

und

$$\mathcal{L}(\sin(2\,\cdot))(s) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(\sin)(s/2) = \frac{1}{2}\frac{1}{1+(s/2)^2} = \frac{2}{4+s^2}$$

für $\mathrm{Re}(s)$ groß genug. Also

$$s^2Y(s) - 1 + 4Y(s) = \frac{2}{4+s^2}$$

und damit

$$Y(s) = \frac{6+s^2}{(4+s^2)^2}$$

für $\mathrm{Re}(s)$ groß genug.

Aufgabe 4 (Fourier-Reihe) **4 + 4 + 2 = 10 Punkte**

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als die 2π-periodische Fortsetzung der Funktion $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$,

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \pi] \\ t & \text{falls } t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{cases}.$$

(a) An welchen Stellen $t \in [-\pi, \pi]$ konvergiert die Fourierreihe von f? Gegen welchen Wert konvergiert die Fourierreihe an diesen Stellen jeweils?

(b) Berechnen Sie die reellen Fourierkoeffizienten a_k und b_k von f.
Hinweis: Vereinfachen Sie soweit wie möglich, insbesondere bis keine trigonometrischen Funktionen mehr auftreten.

(c) Berechnen Sie $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$, wenn c_k die komplexen Fourierkoeffizienten von f bezeichnen.

Lösung:

(a) Nach Satz 2.24 *i)* konvergiert die Fourierreihe punktweise gegen $\tilde{f} : R \to \mathbb{R}$ mit

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{2}\big(f(t^+) + f(t^-)\big) = \frac{1}{2}\left(\lim_{h\searrow 0} f(t+h) + \lim_{h\searrow 0} f(t-h)\right).$$

Somit konvergiert die Fourierreihe punktweise gegen f in allen Punkten $t \in [-\pi, \pi]$ mit $f(t) = \tilde{f}(t)$. Dies ist insbesondere für alle $t \in [-\pi, \pi]$ erfüllt, in denen f stetig ist , d.h. für $t \in$

$[-\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$. An den Stellen $\pm\frac{\pi}{2}$ ist f nicht stetig , weswegen wir diese gesondert betrachten müssen. Es gilt

$$f\left(\frac{\pi}{2}^+\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \qquad f\left(\frac{\pi}{2}^-\right) = \frac{\pi}{2},$$
$$f\left(-\frac{\pi}{2}^-\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0, \qquad f\left(-\frac{\pi}{2}^+\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Somit konvergiert die Fourierreihe nicht punktweise gegen f in $\pm\frac{\pi}{2}$ sondern gegen $\pm\frac{\pi}{4}$.

(b) g ist eine ungerade Funktion und somit auch f. Nach Blatt 6 Aufgabe 4 gilt demnach $a_k = 0$ für $k \geq 0$. Wir berechnen somit b_k für $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\pi/2} \underbrace{f(t)}_{=0} \sin(kt)\,\mathrm{d}t + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{f(t)}_{=t} \sin(kt)\,\mathrm{d}t + \int_{\pi/2}^{\pi} \underbrace{f(t)}_{=0} \sin(kt)\,\mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} t \sin(kt)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(kt) - kt\cos(kt)}{k^2} \right) \Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \frac{2\sin(\frac{\pi}{2}k) - \pi k \cos(\frac{\pi}{2}k)}{\pi k^2} \\
&= \begin{cases} -\dfrac{1}{k}, & \text{falls 4 Teiler von } k \\ -\dfrac{2}{\pi k^2}, & \text{falls 4 Teiler von } k+1 \\ \dfrac{1}{k}, & \text{falls 4 Teiler von } k+2 \\ \dfrac{2}{\pi k^2}, & \text{falls 4 Teiler von } k+3 \end{cases}
\end{aligned}$$

(c) Wir zeigen, dass f quadratintegrierbar ist:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t &= \left(\int_{-\pi}^{-\pi/2} \underbrace{|f(t)|^2}_{=0}\,\mathrm{d}t + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{|f(t)|^2}_{=|t|^2}\,\mathrm{d}t + \int_{\pi/2}^{\pi} \underbrace{|f(t)|^2}_{=0}\,\mathrm{d}t \right) \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |t|^2\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{\pi/2} t^2\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{3} t^3 \Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{12}.
\end{aligned}$$

Damit gilt die Parseval'sche Gleichung (Satz 2.28) und wir erhalten

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{24}.$$

Aufgabe 5 (Partielle Differentialgleichung) **1 + 4 = 5 Punkte**

Wir betrachten die partielle Differentialgleichung

$$u_t = u_{xx} - u \qquad (t \in \mathbb{R}, x \in [0,\pi]). \tag{2}$$

(a) Ist diese partielle Differentialgleichung elliptisch, parabolisch, hyperbolisch oder von gemischtem Typ?

(b) Setzen Sie den Ansatz

$$u(x,t) = v(x)w(t) \quad \text{mit} \quad 0 \not\equiv v \in C^2([0,\pi],\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad 0 \not\equiv w \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \tag{3}$$

in (2) ein und bestimmen Sie damit gewöhnliche Differentialgleichungen für v und w und deren allgemeine reelle Lösungen.

Lösung:

(a) Weil die lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung (2) geschrieben werden kann als

$$0 = u_{xx} - u_t - u = (u_{xx}\, u_{tt})\, A(x,t) \begin{pmatrix} u_{xx} \\ u_{tt} \end{pmatrix} - u_t - u \qquad \text{mit} \qquad A(x,t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und weil $\det A(x,t) = 0$ und $A(x,t)^\top = A(x,t) \neq 0$ für alle (x,t), ist (2) parabolisch. Alternativ: $A(x,t)^\top = A(x,t)$ und genau ein Eigenwert von $A(x,t)$ ist Null und der andere ist ungleich Null

(b) Setzt man den Ansatz (3) in (2) ein, so erhält man

$$v(x)w'(t) = u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) - u(x,t) = \big(v''(x) - v(x)\big)w(t)$$

für alle $(x,t) \in [0,\pi] \times \mathbb{R}$. Wegen $v, w \not\equiv 0$ ergeben sich damit die folgenden Differentialgleichungen für v und w:

$$w'(t) = \frac{v''(x_0) - v(x_0)}{v(x_0)} w(t) = cw(t) \qquad (t \in \mathbb{R}) \tag{4}$$

und

$$v''(x) - \Big(1 + \frac{w'(t_0)}{w(t_0)}\Big) v(x) = v''(x) - kv(x) = 0 \qquad (x \in [0,\pi]), \tag{5}$$

wobei $x_0 \in [0,\pi]$ und $t_0 \in \mathbb{R}$ irgendwelche Stellen mit $v(x_0) \neq 0$ und $w(t_0) \neq 0$ sind und

$$c := \frac{v''(x_0) - v(x_0)}{v(x_0)} \qquad \text{und} \qquad k := 1 + \frac{w'(t_0)}{w(t_0)} = 1 + c$$

Die allgemeine reelle Lösung von (4) ist gegeben durch

$$w(t) = \alpha e^{ct} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Die allgemeine reelle Lösung von (5) ist,

- falls $k > 0$, gegeben durch

$$v(x) = \alpha e^{\sqrt{k}x} + \beta e^{-\sqrt{k}x} \qquad (x \in [0, \pi])$$

- falls $k = 0$, gegeben durch

$$v(x) = \alpha + \beta x \qquad (x \in [0, \pi])$$

- falls $k < 0$, gegeben durch

$$v(x) = \alpha \cos(\sqrt{|k|}x) + \beta \sin(\sqrt{|k|}x) \qquad (x \in [0, \pi])$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 6 (Holomorphe Funktionen) **2 + 1 + 2 = 5 Punkte**

(a) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, in welchen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := \bar{z}\,|z|^2$ komplex differenzierbar ist.

(b) Sei $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, sodass $g(z) = -1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 3$. Bestimmen Sie $g(2)$.

(c) Sei $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, sodass $h(z) \to 0$ für $|z| \to \infty$. Zeigen Sie, dass dann bereits $h(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Lösung:

(a) Es gilt

$$f(x + iy) = (x - iy)(x^2 + y^2) = \underbrace{x^3 + xy^2}_{=:u(x,y)} + i\,\underbrace{(-y^3 - yx^2)}_{=:v(x,y)}.$$

Wir prüfen die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen:

$$3x^2 + y^2 = u_x(x, y) \overset{!}{=} v_y(x, y) = -3y^2 - x^2$$
$$2xy = u_y(x, y) \overset{!}{=} -v_x(x, y) = 2xy$$

Wir sehen, dass die zweite Cauchy-Riemann Differentialgleichung stets erfüllt ist. Die erste ist jedoch äquivalent zu $x^2 = -y^2$ und ist folglich nur für $x = y = 0$ erfüllt. Somit ist die Funktion f nur im Punkt $z = 0$ komplex differenzierbar.

Alternativ kann auch die komplexe Formulierung der CR-DGL verwendet werden, d.h. $f_x(x + iy) \overset{!}{=} -if_y(x + iy)$. Dies führt auf

$$3x^2 + y^2 - i(2xy) \overset{!}{=} -3y^2 - x^2 - i(2xy).$$

Durch Vergleich von Real- und Imaginärteil bzw. Addition von $i(2xy)$ führt dies auf das gleiche Ergebnis wie oben.

(b) Nach der Cauchy'schen Integralformel (Satz 5.21) gilt

$$\begin{aligned} g(2) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_3(0)} \frac{g(w)}{w-2}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_3(0)} \frac{-1}{w-2}\,\mathrm{d}w \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_3(0)} \frac{1}{w-2}\,\mathrm{d}w = -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{w-2}, 2\right) \\ &= -1 \end{aligned}$$

In Aufgabe 8 Blatt 12 (Vortragsübungsaufgabe) wurde gezeigt, dass für $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $h(z) = 0$ für alle $z \in \partial B_r(a)$ bereits $h(z) = 0$ für alle $z \in \overline{B_r(a)}$ gilt. Es ist daher auch zulässig, wenn dies auf die Funktion $h := g + 1$ angewendet wird, um damit auf $g(2) = -1$ zu schließen.

(c) Nach Annahme existiert ein $R > 0$, sodass $|h(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$. Weiterhin existiert ein $C > 0$ mit $|h(z)| \leq C$ für alle $z \in \overline{B_R(0)}$, da $\overline{B_R(0)}$ kompakt und h stetig ist. Insgesamt erhalten wir demnach

$$|h(z)| \leq \min(1, C) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Nach dem Satz von Liouville (Satz 5.31) ist h somit konstant. Da aber $h(z)$ gegen 0 konvergiert für $|z| \to \infty$ muss bereits $h(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten.

Aufgabe 7 (Residuen) **5 + 1 + 4 = 10 Punkte**

(a) Sei $f(z) := \frac{1}{(z^2+1)(z+2)^2}$. Bestimmen Sie die Residuen $\operatorname{Res}(f, z_k)$ für alle Polstellen z_k von f, und berechnen Sie

$$\int_{\partial B_2(1)} f(z)\,\mathrm{d}z \qquad \text{sowie} \qquad \int_{\partial B_2(1)} \frac{1}{(z+2)^2}\,\mathrm{d}z.$$

(b) Sei f wie in Aufgabenteil (a). Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt 1.

(c) Berechnen Sie den Wert des uneigentlichen Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Lösung:

(a) Wegen $f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+i)(z+2)^2}$ sind die Polstellen von f gegeben durch

$$z_1 = i, \qquad z_2 = -i, \qquad z_3 = -2.$$

Weil $\pm i$ einfache Nullstellen des Nennerpolynoms sind, folgt

$$\operatorname{Res}(f,i) = \frac{1}{(z+i)(z+2)^2}\bigg|_{z=i} = \frac{1}{2i(3+4i)} = \frac{-4-3i}{50}$$

und

$$\operatorname{Res}(f,-i) = \frac{1}{(z-i)(z+2)^2}\bigg|_{z=-i} = \frac{1}{-2i(3-4i)} = \frac{-4+3i}{50}.$$

Weil ferner -2 eine zweifache Nullstelle des Nennerpolynoms ist, folgt mit $g(z) := (z+2)^2 f(z) = \frac{1}{z^2+1}$

$$\operatorname{Res}(f,-2) = g'(-2) = -\frac{2\cdot(-2)}{((-2)^2+1)^2} = \frac{4}{25},$$

denn $g'(z) = \frac{-2z}{z^2+1}$. Weiterhin folgt mit Satz 5.37 (Residuensatz), dass

$$\int_{\partial B_2(1)} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\big(\operatorname{Res}(f,i)+\operatorname{Res}(f,-i)\big) = 2\pi i\frac{-8}{50} = -\frac{8}{25}\pi i,$$

denn $\partial B_2(1)$ umläuft die Polstellen $\pm i$ jeweils einmal im Gegenuhrzeigersinn und die Polstelle -2 keinmal. Schließlich folgt mit Satz 5.15 (Cauchy'scher Integralsatz), dass

$$\int_{\partial B_2(1)} \frac{1}{(z+2)^2}\,\mathrm{d}z = 0,$$

denn $z \mapsto \frac{1}{(z+2)^2}$ ist holomorph auf der einfach zusammenhängenden Umgebung $B_3(1)$von $\overline{B}_2(1)$.

(b) Aufgrund von Satz 5.25 (Potenzreihendarstellung holomorpher Funktionen) ist der Konvergenzradius r der Taylorreihe von f um 1 gegeben durch den Abstand des Entwicklungspunkts 1 von der Polstellenmenge $\{i,-i,-2\}$ von f. Also kurz:

$$r = \operatorname{dist}(1,\{i,-i,-2\}) = |1-i| = \sqrt{2}.$$

(c) Zunächst gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{Re}\bigg(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x\bigg).$$

Sei nun $f(z) := 1/(1+4z^2)$. Wegen $f(z) \longrightarrow 0$ für $|z| \to \infty$ gilt nach einem Satz aus der Vorlesung (Satz 5.43):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z)>0} \operatorname{Res}(fe^{i\,\cdot}, z).$$

Wegen $f(z) = \frac{1}{4(z-i/2)(z+i/2)}$ gilt weiter:

$$\begin{aligned}2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z)>0} \operatorname{Res}(fe^{i\,\cdot}, z) &= 2\pi i \operatorname{Res}(fe^{i\,\cdot}, i/2)\\ &= 2\pi i \frac{e^{iz}}{4(z+i/2)}\bigg|_{z=i/2} = 2\pi i\frac{e^{-1/2}}{4i} = \frac{\pi}{2}e^{-1/2}.\end{aligned}$$

Also insgesamt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{Re}\Big(\frac{\pi}{2}e^{-1/2}\Big) = \frac{\pi}{2}e^{-1/2}.$$

Aufgabe 8 (Differentialgleichung höherer Ordnung) **2 + 3 = 5 Punkte**

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y^{(3)}(t) - 3y''(t) + 2y'(t) = e^{2t} + e^{-t}.$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

Lösung:

(a) Das Charakteristische Polynom P der Differentialgleichung ist gegeben durch

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

Nach Satz 6.4 ist somit $\{1 = e^{0t}, e^t, e^{2t}\}$ ein Fundamentalsystem. Die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ist somit gegeben durch

$$y_h(t) = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{2t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

(b) Wir berechnen eine partikuläre Lösung y_p mittels Ansatz der rechten Seite. Wir betrachten dabei den Resonanzfall für e^{2t} und den nicht Resonanzfall für e^{-t} gesondert. Sei dazu $y_1(t) = cte^{2t}$ und $y_2(t) = de^{-t}$. Es folgt

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 2cte^{2t} + ce^{2t}, & y_2'(t) &= -y_2(t), \\ y_1''(t) &= 4cte^{2t} + 4ce^{2t}, & y_2''(t) &= y_2(t) \\ y_1^{(3)}(t) &= 8cte^{2t} + 12ce^{2t}, & y_2^{(3)}(t) &= -y_2(t). \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} y_1^{(3)}(t) - 3y_1''(t) + 2y_1'(t) &= 2ce^{2t} \stackrel{!}{=} e^{2t}, \\ y_2^{(3)}(t) - 3y_2''(t) + 2y_2'(t) &= -6de^{-t} \stackrel{!}{=} e^{-t}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich $c = \frac{1}{2}$ und $d = -\frac{1}{6}$ und somit

$$y_p(t) = y_1(t) + y_2(t) = \frac{1}{2}te^{2t} - \frac{1}{6}e^{-t}.$$

Die allgemeine Lösung ist nun gegeben durch

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = \frac{1}{2}te^{2t} - \frac{1}{6}e^{-t} + c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{2t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Alternativ kann die DGL auch in ein System erster Ordnung umgeschrieben werden:

$$Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y^{(3)} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}}_{=:A} \underbrace{\begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}}_{=:Y} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{2t} + e^{-t} \end{pmatrix}}_{=:b(t)}.$$

(a) Wir bestimmen nun die allgemeine Lösung $Y_h = (y_h, y_h', y_h'')^T$ des Systems. Dann ist y_h die allgemeine Lösung der ursprünglichen homogenen Differentialgleichung. Wir berechnen dazu das Charakteristische Polynom $\chi_A(t) = \det(A - tE) = -t(t-1)(t-2)$. Wir erhalten damit die folgenden Eigenwerte und Eigenvektoren:

$$\lambda_1 = 0, v_1 = (1,0,0)^T, \quad \lambda_2 = 1, v_2 = (1,1,1)^T, \quad \lambda_3 = 2, v_3 = (1,2,4)^T.$$

Die Lösung Y_h ist nun gegeben durch

$$Y_h(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 v_3 e^{\lambda_3 t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

und somit

$$y_h(t) = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{2t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

(b) Auch hier berechnen wir eine partikuläre Lösung $Y_p = (y_p, y_p', y_p'')^T$ des Systems und erhalten mit y_p eine partikuläre Lösung der ursprünglichen DGL. Mit den Ergebnissen aus a) wissen wir, dass eine Fundamentalmatrix gegeben ist durch

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} v_1 e^{\lambda_1 t} & v_2 e^{\lambda_2 t} & v_3 e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e^t & e^{2t} \\ 0 & e^t & 2e^{2t} \\ 0 & e^t & 4e^{2t} \end{pmatrix}$$

Nach Satz 3.15 ist die partikuläre Lösung gegeben durch

$$Y_p(t) = \Phi(t) \int_0^t \Phi(s)^{-1} b(s)\,\mathrm{d}s$$

mit

$$\Phi(s)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2e^{-s} & -e^{-s} \\ 0 & -\frac{1}{2}e^{-2s} & \frac{1}{2}e^{-2s} \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten damit

$$\begin{aligned} Y_p(t) &= \Phi(t) \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{2s} + \frac{1}{2}e^{-s} \\ -e^s - e^{-2s} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-3s} \end{pmatrix} \mathrm{d}s \\ &= \begin{pmatrix} 1 & e^t & e^{2t} \\ 0 & e^t & 2e^{2t} \\ 0 & e^t & 4e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^{2t} - e^{-t} + \frac{3}{4} \\ -e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}t - \frac{1}{6}e^{-3t} + \frac{1}{6} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir berechnen nun nur die erste Komponente, da diese gerade y_p entspricht. Es folgt

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-t} - 1 + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}te^{2t} - \frac{1}{6}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t} \\ &= \frac{1}{2}te^{2t} - \frac{1}{6}e^{-t} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}e^t + \frac{5}{12}e^{2t}. \end{aligned}$$

Da die letzten drei Summanden eine Lösung der homogenen DGL ergeben ergibt sich letztlich

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = \frac{1}{2}te^{2t} - \frac{1}{6}e^{-t} + c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{2t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$