Klausur zur Höheren Mathematik III

für die Fachrichtung: phys, kyb, mecha

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 3 eigenhändig handbeschriebene DIN-A4-Blätter.
  Insbesondere sind elektronische Hilfsmittel nicht erlaubt.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- **Alle Aufgaben** zählen.
- Bei **allen Aufgaben** sind sämtliche Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen selbstmitgebrachte Extrablätter und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab **16. Oktober 2017** über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, werden voraussichtlich ab dem **16. Oktober 2017** nähere Informationen bezüglich der mündlichen Nachprüfung auf der Homepage zu HM III–Haasdonk

`https://ilias3.uni-stuttgart.de/goto_Uni_Stuttgart_crs_1088458.html`

finden.

Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (Mehrdimensionale Integration) **2+4+4 = 10 Punkte**

(a) Es bezeichne $D \subset \mathbb{R}^2$ die Trapezfläche mit den Eckpunkten $(-3,0)^T, (-2,2)^T, (2,2)^T$ und $(3,0)^T$. Schreiben Sie D als y-Normalbereich und berechnen Sie das Volumen $\mathrm{vol}(D)$.

(b) Sei $F := \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 = 9, y \geq 0, -2 \leq z \leq 2\right\}$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) := z^2(x+y)$. Geben Sie eien Parametrisierung von F an und berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_F f \,\mathrm{d}o.$$

(c) Sei $K := \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 \leq 1\right\}$ und die Dichte $\rho : K \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\rho(x,y,z) = \begin{cases} 3, & \text{für } x,y \geq 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Berechnen Sie die Koordinaten x_S und z_S des Schwerpunkts $(x_S, y_S, z_S)^T \in \mathbb{R}^3$ von K.

Aufgabe 2 (Integralsätze) **2+3 = 5 Punkte**

Sei $F \subset \mathbb{R}^3$ die Fläche gegeben durch

$$F := \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = 9 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9},\, z \geq 0\right\}.$$

Sei weiterhin $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(x,y,z) := \begin{pmatrix} e^x + zy^2 \\ \frac{y^2}{9} + x\sin(z) \\ 1 + xy \end{pmatrix}.$$

(a) Skizzieren Sie die Menge

$$C := \left\{(x,y,0)^T \in \mathbb{R}^3 : 0 = 9 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}\right\}$$

und parametrisieren Sie sie durch eine C^1-Kurve.

(b) Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\int_F \langle \mathrm{rot}(f), n\rangle \,\mathrm{d}o$. Hierbei bezeichnet n den Einheitsnormalenvektor mit positiver z-Komponente.

Aufgabe 3 (Differentialgleichungen) **1+2+1+3+3 = 10 Punkte**

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$y_1' = 6y_1 - y_2 + e^{3t}, \qquad y_2' = 9y_1. \tag{1}$$

(a) Schreiben Sie das System (1) in der Form $y' = Ay + b(t)$ mit einem $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $b(t) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Ist das homogene System $y' = Ay$ asymptotisch stabil?

(c) Berechnen Sie $(A - 3I)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $I \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Einheitsmatrix bezeichnet.

(d) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem reeller Lösungen des homogenen Systems $y' = Ay$.

(e) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems zum inhomogenen System (1) mit Anfangsbedingung $y(0) = (1, 2)^T$.

Aufgabe 4 (Fourier-Reihe) **1+3+4+2 = 10 Punkte**

Sei die 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := |\sin(x)|$.

(a) Besitzt f eine 2π-periodische Stammfunktion?

(b) Für welche $t \in [-\pi, \pi]$ konvergiert die Fourierreihe von f punktweise? Gegen welche Werte konvergiert sie in diesem Fall? Ist die Fourierreihe sogar gleichmäßig konvergent?

(c) Berechnen sie die reellen Fourierkoeffizienten a_k und b_k von f.
Hinweis: Vereinfachen Sie soweit wie möglich, insbesondere bis keine trigonometrischen Funktionen mehr auftreten.

(d) Berechnen Sie den Wert der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$.

Aufgabe 5 (Partielle Differentialgleichungen) **1+2+2 = 5 Punkte**

Wir betrachten die 1-dimensionale Wellengleichung

$$u_{tt} = u_{xx} \qquad ((x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}). \tag{2}$$

(a) Ist diese partielle Differentialgleichung elliptisch, parabolisch, hyperbolisch oder von gemischtem Typ?

(b) Bestimmen Sie die Lösung $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ des Anfangswertproblems zu (2) mit Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = 1 \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{und} \qquad u_t(x,0) = \cos(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

(c) Bestimmen Sie die Lösung $u \in C^2([0,\pi] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ des Anfangsrandwertproblems zu (2) mit Randbedingungen

$$u(0,t) = 0 = u(\pi,t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

und mit Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = \sin(2x) \quad (x \in [0,\pi]) \qquad \text{und} \qquad u_t(x,0) = 0 \quad (x \in [0,\pi]).$$

Aufgabe 6 (Holomorphe Funktionen) **2 + 1 + 2 = 5 Punkte**

(a) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, in denen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := z^2 + \mathrm{Im}(z)^2$ komplex differenzierbar ist.

(b) Sei $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $g(z) = (z-1)^2$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 2$. Berechnen Sie den Wert $g''(1)$.

(c) Sei $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe nicht konstante Funktion mit $|h(z)| = 1$ für $z \in \partial B_1(0)$. Zeigen Sie, dass h mindestens eine Nullstelle in $B_1(0)$ hat, d.h. es gibt $z \in B_1(0)$ mit $h(z) = 0$.
Hinweis: Nehmen Sie das Gegenteil an und betrachten Sie die Funktion $\frac{1}{h}$.

Aufgabe 7 (Wegintegrale und Residuen) **2+4+1+3 = 10 Punkte**

(a) Sei C die geradlinige Verbindungsstrecke von 0 nach $1+i$. Berechnen Sie

$$\int_C z\, e^z \,\mathrm{d}z.$$

(b) Sei $f(z) := \frac{1}{(z-2)^2(e^z-1)}$. Bestimmen Sie die Residuen $\mathrm{Res}(f, z_k)$ für alle Polstellen z_k von f, und berechnen Sie

$$\int_{\partial B_1(0)} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

(c) Sei $g(z) := ze^{1/z^2}$. Bestimmen Sie das Residuum $\mathrm{Res}(g, 0)$.

(d) Berechnen Sie den Wert des uneigentlichen Integrals

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 8 (Differentialgleichungen höherer Ordnung) **2+3 = 5 Punkte**

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y^{(4)} - y^{(2)} = t\sin(t).$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.