Aufgabe 1 (Mehrdimensionale Integration) **2+4+4 = 10 Punkte**

(a) Es bezeichne $D \subset \mathbb{R}^2$ die Trapezfläche mit den Eckpunkten $(-3,0)^T, (-2,2)^T, (2,2)^T$ und $(3,0)^T$. Schreiben Sie D als y-Normalbereich und berechnen Sie das Volumen $\mathrm{vol}(D)$.

(b) Sei $F := \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 = 9, y \geq 0, -2 \leq z \leq 2\right\}$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) := z^2(x+y)$. Geben Sie eine Parametrisierung von F an und berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_F f \,\mathrm{d}o.$$

(c) Sei $K := \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 \leq 1\right\}$ und die Dichte $\rho : K \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\rho(x,y,z) = \begin{cases} 3, & \text{für } x, y \geq 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Berechnen Sie die Koordinaten x_S und z_S des Schwerpunkts $(x_S, y_S, z_S)^T \in \mathbb{R}^3$ von K.

Lösung:

(a) Wir können D als y-Normalbereich schreiben mittels

$$D = \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq y \leq 2 \quad \text{und} \quad -3 + \frac{y}{2} \leq x \leq 3 - \frac{y}{2}\right\}.$$

Es ergibt sich damit

$$\mathrm{vol}(D) = \int_D 1 \,\mathrm{d}(x,y) = \int_0^2 \int_{-3+y/2}^{3-y/2} 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^2 6 - y \,\mathrm{d}y = 12 - 2 = 10.$$

Alternativ kann D auch als x-Normalbereich geschrieben werden:

$$D = \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \,|\, -3 \leq x \leq 3 \quad \text{und} \quad 0 \leq y \leq \min(2, 6-2x, 6+2x)\right\}.$$

Es ergibt sich ebenfalls

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(D) &= \int_D 1 \,\mathrm{d}(x,y) = \int_{-3}^{3} \int_0^{\min(2,6-2x,6+2x)} 1 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-3}^{-2} 6 + 2x \,\mathrm{d}x + \int_{-2}^{2} 2 \,\mathrm{d}x + \int_2^3 6 - 2x \,\mathrm{d}x \\ &= 1 + 8 + 1 = 10.\end{aligned}$$

(b) Eine Parametrisierung von F ist gegeben druch $p : D := [0, \pi] \times [-2, 2] \to \mathbb{R}^3$

$$p(\phi, z) = \begin{pmatrix} 3\cos(\phi) \\ 3\sin(\phi) \\ z \end{pmatrix}.$$

Für die partiellen Ableitungen erhalten wir

$$p_\phi(\phi, z) = \begin{pmatrix} -3\sin(\phi) \\ 3\cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad p_z(\phi, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und somit

$$(p_\phi \times p_z)(\phi, z) = \begin{pmatrix} 3\cos(\phi) \\ 3\sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \|(p_\phi \times p_z)(\phi, z)\| = 3.$$

Das Oberflächenintegral berechnet sich nun mittels

$$\begin{aligned}
\int_F f \,\mathrm{d}o &= \int_D f(p(\phi, z))\|(p_\phi \times p_z)(\phi, z)\| \,\mathrm{d}(\phi, z) \\
&= \int_D z^2(3\cos(\phi) + 3\sin(\phi))3 \,\mathrm{d}(\phi, z) \\
&= \int_0^\pi \int_{-2}^2 9z^2(\cos(\phi) + \sin(\phi)) \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\phi \\
&= 96
\end{aligned}$$

Eine Parametrisierung, die ohne die Verwendung von cos und sin auskommt ist durch $p : D := [-3, 3] \times [-2, 2] \to \mathbb{R}^3$

$$p(x, z) = \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{9 - x^2} \\ z \end{pmatrix}$$

gegeben. Hier erhalten wir

$$p_x(x, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad p_z(x, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und somit

$$(p_x \times p_z)(x, z) = \begin{pmatrix} \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \|(p_x \times p_z)(x, z)\| = \frac{3}{\sqrt{9 - x^2}}.$$

Wie auch zuvor berechnet sich das Oberflächenintegral mittels

$$
\begin{aligned}
\int_F f \, \mathrm{d}o &= \int_D f(p(x,z)) \|(p_x \times p_z)(x,z)\| \, \mathrm{d}(x,z) \\
&= \int_D z^2 \left(x + \sqrt{9-x^2} \right) \frac{3}{\sqrt{9-x^2}} \, \mathrm{d}(x,z) \\
&= \int_{-2}^{2} 3z^2 \, \mathrm{d}z \int_{-3}^{3} \underbrace{\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}}_{\text{ungerade}} + 1 \, \mathrm{d}x \\
&= 16 \cdot 6 = 96.
\end{aligned}
$$

(c) Wir führen die Berechnungen in Kugelkoordinaten durch, d.h.

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad r \in [0,1], \theta \in [0,\pi], \varphi \in [0,2\pi].
$$

In Kugelkoordinaten hat die Dichte folgende Form

$$
\rho(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} 3, & \text{für } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}
$$

Die Masse $\mathrm{m}(K)$ der Kugel berechnet sich somit zu

$$
\begin{aligned}
\mathrm{m}(K) &= \int_K \rho(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= \int_{[0,1]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]} \rho(r,\theta,\varphi) r^2 \sin(\theta) \, \mathrm{d}(r,\theta,\varphi) \\
&= \int_0^1 r^2 \, \mathrm{d}r \int_0^{\pi} \sin(\theta) \, \mathrm{d}\theta \left(\int_0^{\pi/2} 3 \, \mathrm{d}\varphi + \int_{\pi/2}^{2\pi} 1 \, \mathrm{d}\varphi \right) \\
&= \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\pi + \frac{3}{2}\pi \right) \\
&= 2\pi.
\end{aligned}
$$

Da K radialsymmetrisch ist und ρ keine direkte Abhängigkeit von z aufweist, können wir schließen, dass $z_S = 0$ gilt. Wir berechnen nun die x-Koordinate x_S:

$$\begin{aligned}
x_S &= \frac{1}{\mathrm{m}(K)} \int_K x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{[0,1]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]} r\sin(\theta)\cos(\varphi)\rho(r,\theta,\varphi)r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}(r,\theta,\varphi) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^1 r^3\,\mathrm{d}r \int\limits_0^\pi \sin(\theta)^2\,\mathrm{d}\theta \left(\int\limits_0^{\pi/2} 3\cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi + \int\limits_{\pi/2}^{2\pi} \cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (3-1) \\
&= \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Integralsätze) **2+3 = 5 Punkte**

Sei $F \subset \mathbb{R}^3$ die Fläche gegeben durch

$$F := \left\{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 |\, z = 9 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9},\ z \geq 0 \right\}.$$

Sei weiterhin $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(x,y,z) := \begin{pmatrix} e^x + zy^2 \\ \frac{y^2}{9} + x\sin(z) \\ 1 + xy \end{pmatrix}.$$

(a) Skizzieren Sie die Menge

$$C := \left\{ (x,y,0)^T \in \mathbb{R}^3 : 0 = 9 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \right\}$$

und parametrisieren Sie sie durch eine C^1-Kurve.

(b) Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_F \langle \mathrm{rot}(f), n \rangle \,\mathrm{d}o.$$

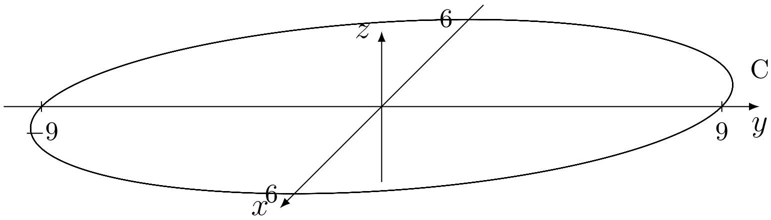
Hierbei bezeichnet n den Einheitsnormalenvektor mit positiver z-Komponente.

Lösung:

(a) Eine mögliche Parametrisierung ist durch $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$$\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} 6\cos(\varphi) \\ 9\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Für die Skizze ergibt sich



(b) Nach dem Satz von Stokes gilt

$$\int_F \langle \operatorname{rot}(f), n\rangle \, \mathrm{d}o = \oint_C \langle f, \, \mathrm{d}\mathbf{x}\rangle \, .$$

Mit unserer Parametrisierung aus Aufgabenteil a) erhalten wir demnach

$$\begin{aligned}
\int_F \langle \operatorname{rot}(f), n\rangle \, \mathrm{d}o &= \oint_C \langle f, \, \mathrm{d}\mathbf{x}\rangle \\
&= \int_0^{2\pi} \langle f(\gamma(\varphi)), \gamma'(\varphi)\rangle \, \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} e^{6\cos(\varphi)} \\ 9\sin(\varphi)^2 \\ 1+54\sin(\varphi)\cos(\varphi) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6\sin(\varphi) \\ 9\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \, \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} -6\sin(\varphi)e^{6\cos(\varphi)} + 81\sin(\varphi)^2\cos(\varphi) \, \mathrm{d}\varphi \\
&= \left(e^{6\cos(\varphi)} + 27\sin(\varphi)^3 \right)\Big|_0^{2\pi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (Differentialgleichungen) **1+2+1+3+3 = 10 Punkte**

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$y_1' = 6y_1 - y_2 + e^{3t}, \qquad y_2' = 9y_1. \tag{1}$$

(a) Schreiben Sie das System (1) in der Form $y' = Ay + b(t)$ mit einem $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $b(t) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Ist das homogene System $y' = Ay$ asymptotisch stabil?

(c) Berechnen Sie $(A - 3I)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $I \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Einheitsmatrix bezeichnet.

(d) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem reeller Lösungen des homogenen Systems $y' = Ay$.

(e) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems zum inhomogenen System (1) mit Anfangsbedingung $y(0) = (1, 2)^\top$.

Lösung:

(a) Das System (1) kann mit $y := (y_1, y_2)^\top$ geschrieben werden als

$$y' = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} y + e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = Ay + b(t) \quad \text{mit} \quad A := \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b(t) := e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Wegen

$$\det \begin{pmatrix} 6-\lambda & -1 \\ 9 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda-3)^2$$

hat A den einzigen Eigenwert 3. Wegen $\mathrm{Re}(3) \geq 0$ und Satz 3.32 (Charakterisierung der asymptotischen Stabilität linearer autonomer Systeme) ist das System $y' = Ay$ nicht asymptotisch stabil.

(c) Wir haben

$$(A-3I)^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} = 0$$

und damit folgt auch $(A-3I)^n = 0$ für alle $n \geq 2$.

(d) Weil $A = 3I + (A-3I)$ und weil $3I$ mit $A - 3I$ vertauscht, gilt nach Satz 3.27 (Eigenschaften des Matrixexponentials) und Aufgabenteil (c)

$$e^{At} = e^{3t} e^{(A-3I)t} = e^{3t}\big(I + (A-3I)t\big) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1+3t & -t \\ 9t & 1-3t \end{pmatrix}.$$

Also ist ein Fundamentalsystem reeller Lösungen von $y' = Ay$ gegeben durch

$$\left\{ e^{3t} \begin{pmatrix} 1+3t \\ 9t \end{pmatrix}, e^{3t} \begin{pmatrix} -t \\ 1-3t \end{pmatrix} \right\}.$$

Alternativ kann man auch Satz 3.22 anwenden, denn 3 ist ein doppelter Eigenwert von $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und A ist wegen $A - 3I \neq 0$ nicht diagonalisierbar. Weil

$$v := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A (zu 3) ist und

$$w := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ein Nebenvektor von A (zu 3) (das heißt: $(A-3I)w = v$), ist ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$ nach Satz 3.22 gegeben durch

$$\left\{ e^{3t} v, e^{3t} w + t e^{3t} v \right\} = \left\{ e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, e^{3t} \begin{pmatrix} 1+t \\ 2+3t \end{pmatrix} \right\}$$

(e) Aufgrund von Korollar 3.33 ist die Lösung y des zu (1) gehörigen Anfangswertproblems mit Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ mit $y_0 := (1, 2)^\top$ gegeben durch

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{At} y_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} b(s)\, \mathrm{d}s \\ &= e^{3t} \begin{pmatrix} 1+t \\ 2+3t \end{pmatrix} + \int_0^t e^{3t} \begin{pmatrix} 1+3(t-s) & -(t-s) \\ 9(t-s) & 1-3(t-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}s \\ &= e^{3t} \begin{pmatrix} 1+t \\ 2+3t \end{pmatrix} + \int_0^t e^{3t} \begin{pmatrix} 1+3s \\ 9s \end{pmatrix} \mathrm{d}s \\ &= e^{3t} \begin{pmatrix} 1+t \\ 2+3t \end{pmatrix} + e^{3t} \begin{pmatrix} t + 3/2t^2 \\ 9/2t^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alternativ kann man auch Satz 3.15 anwenden auf eine beliebige Fundamentalmatrix Φ von $y' = Ay$:

$$y(t) = \Phi(t)\Phi(0)^{-1} y_0 + \Phi(t) \int_0^t \Phi(s)^{-1} b(s)\, \mathrm{d}s$$

Aufgabe 4 (Fourier-Reihe) **1+3+4+2 = 10 Punkte**

Sei die 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := |\sin(x)|$.

(a) Besitzt f eine 2π-periodische Stammfunktion?

(b) Für welche $t \in [-\pi, \pi]$ konvergiert die Fourierreihe von f punktweise? Gegen welche Werte konvergiert sie in diesem Fall? Ist die Fourierreihe sogar gleichmäßig konvergent?

(c) Berechnen sie die reellen Fourierkoeffizienten a_k und b_k von f für die Periodendauer $T = 2\pi$.
Hinweis: Vereinfachen Sie soweit wie möglich, insbesondere bis keine trigonometrischen Funktionen mehr auftreten.

(d) Berechnen Sie den Wert der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$.

Lösung:

(a) Es gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)|\, \mathrm{d}x = 2 \int_0^{\pi} \sin(x)\, \mathrm{d}x = 4 \neq 0.$$

Das Integral über eine Periode verschwindet also nicht, wodurch es keine 2π-periodische Stammfunktion geben kann (Satz 2.27).

(b) f ist stückweise stetig differenzierbar und insgesamt stetig. Nach Satz 2.24 konvergiert somit die Fourierreihe auf $[-\pi, \pi]$ gleichmäßig gegen f . Da die gleichmäßige Konvergenz die punktweise impliziert, konvergiert die Fourierreihe $S_n(f)(t)$ somit punktweise gegen $f(t)$ für jedes $t \in [-\pi, \pi]$.

(c) Da f gerade ist, gilt $b_k = 0$ für $k \geq 1$. Desweiteren folgt mit den Ergebnissen aus Aufgabenteil a)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi},$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)|\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\sin(x)^2\big|_0^{\pi} = 0$$

und für $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)|\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\left(-\cos(x)\cos(kx)\right)\big|_0^{pi} - \frac{2k}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\left(1+(-1)^k\right) - \frac{2k}{\pi}\underbrace{\left(\sin(x)\sin(kx)\right)\big|_0^{\pi}}_{=0} + \underbrace{\frac{2k^2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x}_{=k^2 a_k}. \end{aligned}$$

Durch Auflösen nach a_k erhalten wir

$$a_k = -\frac{2}{\pi}\frac{1+(-1)^k}{k^2-1}.$$

Mit den vorherigen Ergebnissen lässt sich dies insgesamt schreiben als

$$a_{2k} = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{4k^2-1}, \quad k \geq 0$$

$$a_{2k+1} = 0, \quad k \geq 0$$

Man kann die Rechnung auch vereinfachen, wenn man ausnutzt, dass die Minimalperiode von f durch $T_{\min} = \pi$ gegeben ist. Nach Blatt 6 Aufgabe 6 sind somit alle Fourierkoeffizienten mit ungeradem Index gleich 0, d.h.

$$a_{2k+1} = 0, \quad k \geq 0.$$

Wir berechnen die Koeffizienten mit geradem Index:

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)|\cos(2kx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x)\cos(2kx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\left(-\cos(x)\cos(2kx)\right)\big|_0^{pi} - \frac{4k}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x)\sin(2kx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{\pi} - \frac{4k}{\pi}\underbrace{\left(\sin(x)\sin(2kx)\right)\big|_0^{\pi}}_{=0} + \underbrace{\frac{8k^2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x)\cos(2kx)\,\mathrm{d}x}_{=4k^2 a_{2k}}. \end{aligned}$$

Durch Umstellen folgt auch hier

$$a_{2k} = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{4k^2-1}, \quad k \geq 0.$$

(d) Die Fourierreihe ist gegeben durch

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \cos(2kx).$$

Nach Aufgabenteil b) konvergiert die Fourierreihe punktweise gegen f für jedes $t \in [-\pi, \pi]$. Insbesondere gilt damit

$$0 = |\sin(0)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \cos(0) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}.$$

Durch Umstellen erhalten wir letztlich

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2}.$$

Alternativ kann der Grenzwert der Reihe auch direkt berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} &= \lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{4k^2 - 1} \\
&= \lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\
&= \frac{1}{2} - \lim_{N \to \infty} \frac{1}{4N - 2} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (Partielle Differentialgleichungen) **1+2+2 = 5 Punkte**

Wir betrachten die 1-dimensionale Wellengleichung

$$u_{tt} = u_{xx} \qquad ((x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}). \tag{2}$$

(a) Ist diese partielle Differentialgleichung elliptisch, parabolisch, hyperbolisch oder von gemischtem Typ?

(b) Bestimmen Sie die Lösung $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ des Anfangswertproblems zu (2) mit Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = 1 \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{und} \qquad u_t(x,0) = \cos(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

(c) Bestimmen Sie die Lösung $u \in C^2([0,\pi] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ des Anfangsrandwertproblems zu (2) mit Randbedingungen

$$u(0,t) = 0 = u(\pi, t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

und mit Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = \sin(2x) \quad (x \in [0,\pi]) \qquad \text{und} \qquad u_t(x,0) = 0 \quad (x \in [0,\pi]).$$

Lösung:

(a) Weil die lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung (2) geschrieben werden kann als

$$0 = u_{xx} - u_{tt} = \sum_{i,j=1}^{2} a_{i\,j}(x_1, x_2) u_{x_i\,x_j}$$

mit

$$x_1 := x, x_2 := t \qquad \text{und} \qquad \big(a_{i\,j}(x_1, x_2)\big)_{i,j=1,2} := A(x,t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und weil $\det A(x,t) < 0$ und $A(x,t)^\top = A(x,t) \neq 0$ für alle (x,t), ist (2) hyperbolisch.

(b) Aufgrund von Satz 4.7 (d'Alembertsche Formel) mit $c := 1$ gilt

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\big(u_0(x+t) + u_0(x-t)\big) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} v_0(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2}\big(1+1\big) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \cos(s)\,\mathrm{d}s = 1 + \frac{1}{2}\big(\sin(x+t) - \sin(x-t)\big) \\ &= 1 + \cos(x)\sin(t). \end{aligned}$$

(c) Aufgrund der speziellen Anfangsbedingungen (u_0 eine reine Sinusreihe mit nur einem Summanden und $v_0 = 0$) können wir den Ansatz

$$u(x,t) = b(t)\sin(2x) \qquad ((x,t) \in [0,\pi] \times \mathbb{R})$$

machen mit einem zu bestimmenden $b \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Wenn dieses u das gegebene Anfangsrandwertproblem löst, dann gilt

$$b''(t)\sin(2x) = \partial_t^2 u(x,t) = \partial_x^2 u(x,t) = -4b(t)\sin(2x) \qquad ((x,t) \in [0,\pi] \times \mathbb{R})$$

und damit

$$b''(t) = -4b(t).$$

Also

$$b(t) = \alpha\cos(2t) + \beta\sin(2t) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

für gewisse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Aufgrund der Anfangsbedingungen folgt weiter

$$\sin(2x) = u(x,0) = b(0)\sin(2x) = \alpha\sin(2x) \qquad \text{und} \qquad 0 = \partial_t u(x,0) = b'(0)\sin(2x) = 2\beta\sin(2x)$$

für alle $x \in [0,\pi]$, und damit

$$\alpha = 1 \qquad \text{und} \qquad \beta = 0.$$

Also gilt insgesamt

$$u(x,t) = \cos(2t)\sin(2x) \qquad ((x,t) \in [0,\pi] \times \mathbb{R})$$

Alternativ kann man auch von dem allgemeineren Ansatz

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\sin(nx)$$

ausgehenausgehen.

Weitere Alternative: direkte Anwendung von Satz 4.9 aus der Vorlesung mit $c := 1$ und $L := 2\pi$ und $a_k := \delta_{k,2}$.

Aufgabe 6 (Holomorphe Funktionen) **2 + 1 + 2 = 5 Punkte**

(a) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, in denen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := z^2 + \operatorname{Im}(z)^2$ komplex differenzierbar ist.

(b) Sei $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $g(z) = (z-1)^2$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 2$. Berechnen Sie den Wert $g''(1)$.

(c) Sei $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe nicht konstante Funktion mit $|h(z)| = 1$ für $z \in \partial B_1(0)$. Zeigen Sie, dass h mindestens eine Nullstelle in $B_1(0)$ hat, d.h. es gibt $z \in B_1(0)$ mit $h(z) = 0$. **Hinweis:** Nehmen Sie das Gegenteil an und betrachten Sie die Funktion $\frac{1}{h}$.

Lösung:

(a) Für $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x+iy) = (x+iy)^2 + \operatorname{Im}(x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy + y^2 = x^2 + i2xy$$

und somit

$$u(x,y) = x^2 \qquad \text{und} \qquad v(x,y) = 2xy.$$

Wir prüfen die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} 2x = u_x(x,y) &\overset{!}{=} v_y(x,y) = 2x \\ 0 = u_y(x,y) &\overset{!}{=} -v_x(x,y) = 2y \end{aligned}$$

Wir erkennen leicht, dass die erste C.-R. DGL für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist. Die zweite ist genau dann erfüllt, wenn $y = 0$ gilt. Wir erhalten damit, dass f in allen $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist, für die gilt $\operatorname{Im}(z) = 0$. Alternativ kann mann die C.-R. DGLn auch in der komplexen Schreibweise prüfen:

$$2x + 2iy = f_x(x+iy) \overset{1}{=} -if_y(x+iy) = -i(i2x) = 2x.$$

Durch einen Vergleich von Real- und Imaginärteil bzw. durch Substrahieren von $2x$ folgt auch hier schnell, dass $x \in \mathbb{R}$ beliebig und $y = 0$ gelten muss. Es folgt somit, dass f in allen $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist, die $\operatorname{Im}(z) = 0$ erfüllen.

(b) Nach der erweiterten Cauchy Integral Formel (Bemerkung zu Satz 5.28) gilt

$$\begin{aligned} g''(1) &= \frac{2!}{2\pi i} \int_{\partial B_2(0)} \frac{g(w)}{(w-1)^3}\, \mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{\pi i} \int_{\partial B_2(0)} \frac{(w-1)^2}{(w-1)^3}\, \mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{\pi i} \int_{\partial B_2(0)} \frac{1}{(w-1)}\, \mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{\pi i} 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{w-1}, 1\right) \\ &= 2. \end{aligned}$$

(c) Nach dem Maximumsprinzip (Satz 5.23) gilt $|h(z)| \le 1$ für alle $z \in B_1(0)$. Wir nehmen an, dass h keine Nullstelle hat. Dann ist $\frac{1}{h(z)}$ eine holomorphe Funktion mit

$$\left|\frac{1}{h(z)}\right| = 1 \qquad \text{für alle } z \in \partial B_1(0).$$

Nach dem Maximumsprinzip gilt also auch

$$\left|\frac{1}{h(z)}\right| \le 1 \qquad \text{für alle } z \in B_1(0)$$

und somit insgesamt

$$|h(z)| = 1 \qquad \text{für alle } z \in B_1(0).$$

Nach Satz 5.7 ist damit allerdings bereits $h(z)$ konstant für alle $z \in B_1(0)$, was der Voraussetzung widerspricht. Folglich hat h eine Nullstelle in $B_1(0)$.

Aufgabe 7 (Wegintegrale und Residuen) **2+4+1+3 = 10 Punkte**

(a) Sei C die geradlinige Verbindungsstrecke von 0 nach $1+i$. Berechnen Sie

$$\int_C z\, e^z\, \mathrm{d}z.$$

(b) Sei $f(z) := \frac{1}{(z-2)^2(e^z-1)}$. Bestimmen Sie die Residuen $\operatorname{Res}(f, z_k)$ für alle Polstellen z_k von f, und berechnen Sie

$$\int_{\partial B_1(0)} f(z)\, \mathrm{d}z.$$

(c) Sei $g(z) := ze^{1/z^2}$. Bestimmen Sie das Residuum $\operatorname{Res}(g, 0)$.

(d) Berechnen Sie den Wert des uneigentlichen Integrals

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\, \mathrm{d}x.$$

Lösung:

(a) Wegen

$$\int z \cdot e^z \,\mathrm{d}z = ze^z - \int 1 \cdot e^z \,\mathrm{d}z = ze^z - e^z$$

ist $\mathbb{C} \ni z \mapsto F(z) := ze^z - e^z$ eine Stammfunktion von $z \mapsto ze^z$. Also ist

$$\begin{aligned}\int_C ze^z \,\mathrm{d}z &= F(1+i) - F(0) \\ &= (1+i)e^{1+i} - e^{1+i} + 1 = ie^{1+i} + 1\end{aligned}$$

(b) Die Polstellen von f sind gegeben durch 2 und $2\pi in$ mit $n \in \mathbb{Z}$.

Weil $f(z) = \frac{g(z)}{(z-2)^2}$ mit der lokal um 2 holomorphen Funktion $z \mapsto g(z) := (z-2)^2 f(z) = \frac{1}{e^z-1}$, folgt

$$\operatorname{Res}(f,2) = g'(2) = -\frac{e^z}{(e^z-1)^2}\bigg|_{z=2} = -\frac{e^2}{(e^2-1)^2}.$$

Weil $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ mit den lokal um $2\pi in$ holomorphen Funktionen $z \mapsto g(z) := \frac{1}{(z-2)^2}$ und $h(z) := e^z - 1$ und weil $2\pi in$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$ eine einfache Nullstelle von h ist, folgt

$$\operatorname{Res}(f, 2\pi in) = \frac{g(2\pi in)}{h'(2\pi in)} = \frac{1}{(2\pi in - 2)^2} = \frac{1}{4}\frac{1 + 2\pi in - \pi^2 n^2}{(1+\pi^2 n^2)^2}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Schließlich folgt mit Satz 5.37 (Residuensatz), dass

$$\int_{\partial B_1(0)} f(z) \,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{Res}(f,0) = \frac{\pi i}{2}.$$

(c) Weil für $z \neq 0$ (nach Definition der Exponentialreihe)

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\frac{1}{z^{2k-1}} = z + \frac{1}{z} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!}\frac{1}{z^{2k-1}}$$

mit gleichmäßiger Konvergenz auf $\partial B_1(0)$, folgt

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(g,0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_1(0)} g(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_1(0)} z\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{z^{2k-1}}\,\mathrm{d}z \\ &= 1\end{aligned}$$

(d) Zunächst gilt

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x.$$

Sei nun $f(z) := \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{1}{1+z^4}$. Wegen $\deg q \geq \deg p + 2$ gilt nach einem Satz der Vorlesung (Satz 5.39):

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{Res}(f,z)\\ &= \pi i\big(\mathrm{Res}(f,e^{i\pi/4}) + \mathrm{Res}(f,e^{i3\pi/4})\big).\end{aligned}$$

Weil $e^{i\pi/4}$ und $e^{i3\pi/4}$ einfache Nullstellen des Nennerpolynoms q sind, folgt

$$\mathrm{Res}(f,e^{i\pi/4}) = \frac{1}{q'(e^{i\pi/4})} = \frac{1}{4e^{i3\pi/4}}$$

und

$$\mathrm{Res}(f,e^{i3\pi/4}) = \frac{1}{q'(e^{i3\pi/4})} = \frac{1}{4e^{i9\pi/4}} = \frac{1}{4e^{i\pi/4}}$$

Also ergibt sich insgesamt

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x &= \frac{\pi i}{4}\big(e^{-i3\pi/4} + e^{-i\pi/4}\big)\\ &= \frac{\pi i}{4}e^{-i\pi/2}\big(e^{-i\pi/4} + e^{i\pi/4}\big) = \frac{\pi}{2}\cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi\end{aligned}$$

Aufgabe 8 (Differentialgleichungen höherer Ordnung) 2+3 = 5 Punkte

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y^{(4)} - y^{(2)} = t\sin(t). \tag{3}$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

Lösung:

(a) Das charakteristische Polynom p von (3) ist gegeben durch

$$p(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2-1) = \lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1).$$

Also ist ein Fundamentalsystem von (3) gegeben durch

$$\big\{1, t, e^t, e^{-t}\big\}$$

und die allgemeine Lösung von (3) mithin gegeben durch

$$y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^t + c_4 e^{-t} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

mit reellen Zahlen $c_1, \dots, c_4 \in \mathbb{R}$.

(b) Wir bestimmen zunächst eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(4)} - y^{(2)} = te^{it}. \tag{4}$$

Weil nun i keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms p ist (keine Resonanz), machen wir den Ansatz

$$\tilde{y}_p(t) = (a + bt)\, t^0\, e^{it} = (a + bt)e^{it}.$$

Ableiten dieses Ansatzes ergibt

$$\tilde{y}_p^{(1)}(t) = be^{it} + i(a + bt)e^{it}, \qquad \tilde{y}_p^{(2)}(t) = 2ibe^{it} - (a + bt)e^{it},$$
$$\tilde{y}_p^{(3)}(t) = -3be^{it} - i(a + bt)e^{it}, \qquad \tilde{y}_p^{(4)}(t) = -4ibe^{it} + (a + bt)e^{it}.$$

Setzen wir dies in (4) ein, so erhalten wir

$$te^{it} = \tilde{y}_p^{(4)}(t) - \tilde{y}_p^{(2)}(t) = \big(- 6ib + 2a + 2bt\big)e^{it}$$

und damit

$$b = \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad a = \frac{3}{2}i.$$

Weil $t \sin t = \operatorname{Im}(te^{it})$ und p reelle Koeffizienten hat, ist eine partikuläre Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung (3) gegeben durch

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \operatorname{Im}(\tilde{y}_p(t)) \\ &= \operatorname{Im}\big((3/2i + 1/2t)e^{it}\big) = 3/2\operatorname{Im}(ie^{it}) + 1/2t\operatorname{Im}(e^{it}) = 3/2\cos(t) + 1/2t\sin(t) \end{aligned}$$

Statt die Inhomogenität $t\sin(t)$ als $\operatorname{Im}(te^{it})$ zu schreiben und dann die Differentialgleichung mit Inhomogenität te^{it} zu lösen, kann man umständlicher auch

$$t\sin(t) = \frac{1}{2i}(te^{it} - te^{-it})$$

schreiben und dann eine partikuläre Lösung der beiden Differentialgleichungen

$$y^{(4)} - y^{(2)} = te^{\pm it}$$

bestimmen.

Weitere Alternative (wurde aber nicht in Vorlesung behandelt): man kann auch den trigonometrischen Ansatz

$$y_p(t) = (a + bt)\cos(t) + (c + dt)\sin(t)$$

verwenden.