Aufgabe 1 (*10 Punkte*) Sei

$$D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ z = xy + 1 \text{ und } x^2 + y^2 \leqq 1\}\,.$$

(a) (*6 Punkte*) Berechnen Sie den Flächeninhalt von D.

(b) (*4 Punkte*) Sei ferner

$$B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ z = x^2 + xy + y^2 \text{ und } x^2 + y^2 \leqq 1\}\,.$$

Berechnen Sie den Ausfluss des Vektorfeldes $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ y-x \\ x^2+y^2+z \end{pmatrix}$$

durch die geschlossene Fläche $D \cup B$.

(a) Eine Parametrisierung von D ist gegeben durch

$$\Phi\colon [0,1] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3\,, \quad (r,\theta) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ r^2\cos\theta\sin\theta + 1 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen

$$\Phi_r = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 2r\cos\theta\sin\theta \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Phi_\theta = \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir für die Normale

$$\Phi_r \times \Phi_\theta = \begin{pmatrix} \sin\theta \cdot r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 2r\cos\theta\sin\theta \cdot r\cos\theta \\ 2r\cos\theta\sin\theta \cdot (-r\sin\theta) - \cos\theta \cdot r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ \cos\theta \cdot r\cos\theta - \sin\theta \cdot (-r\sin\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r^2\sin\theta \\ -r^2\cos\theta \\ r \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$|\Phi_r \times \Phi_\theta| = \sqrt{r^4\sin^2\theta + r^4\cos^2\theta + r^2} = r\sqrt{r^2+1}\,.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} |S| &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} |\Phi_r \times \Phi_\theta| \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r(r^2+1)^{\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2}(u+1)^{\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}u = \left[\frac{2}{3}\pi(u+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)\pi \end{aligned}$$

mit der Substitution $u := r^2$.

(b) Die geschlossene Fläche $D \cup B$ berandet den Normalbereich

$$\left\{ \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z \end{pmatrix} : \begin{array}{c} 0 \leqq r \leqq 1\,, \\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi\,, \\ r^2\cos\theta\sin\theta + r^2 \leqq z \leqq r^2\cos\theta\sin\theta + 1 \end{array} \right\}.$$

Hierbei wurden Polarkoordinaten in der xy-Ebene benutzt. Insbesondere ist $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$. Wir berechnen

$$\operatorname{div} f = 3\,.$$

Mit dem Satz von Gauß folgt somit

$$\begin{aligned} A(f, D \cup B) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r^2\cos\theta\sin\theta + r^2}^{r^2\cos\theta\sin\theta+1} (\operatorname{div} f)\cdot r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r^2\cos\theta\sin\theta + r^2}^{r^2\cos\theta\sin\theta+1} 3r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-r^2)\cdot 3r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r = 2\pi \int_0^1 (3r - 3r^3)\,\mathrm{d}r = \left[\pi\left(3r^2 - \frac{3}{2}r^4\right)\right]_0^1 = \frac{3}{2}\pi\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (*12 Punkte*) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y^{(4)} - 6y^{(3)} + 10y^{(2)} = 3\sin(x) + 120x + 8\ .$$

(a) (*10 Punkte*) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung.

(b) (*2 Punkte*) Bestimmen Sie alle Lösungen, welche die Bedingung

$$f(0) = \frac{11}{13}$$

erfüllen. Von wie vielen Parametern hängen sie ab?

(a) **SCHRITT 1:** In einem ersten Schritt löst man die homogene Gleichung $y^{(4)} - 6y^{(3)} + 10y^{(2)} = 0$. Das charakteristische Polynom $P(X)$ dieser Differentialgleichung ist

$$P(X) = X^4 - 6X^3 + 10X^2 = X^2(X^2 - 6X + 10) = X^2(X - 3 + i)(X - 3 - i)$$

und hat die Nullstellen 0, $3 - i$ und $3 + i$.
Die allgemeine homogene Lösung f_h ist dann:

$$f_h(x) = a + bx + ce^{3x}\cos(x) + de^{3x}\sin(x)$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
SCHRITT 2: In einem zweiten Schritt bestimmt man nun irgendeine beliebige (partikuläre) Lösung der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung – beispielsweise durch einen Ansatz nach Art der rechten Seite.

Partikuläre Lösung durch Ansatz nach Art der rechten Seite
Aufgrund des Superpositionsprinzips bekommt man eine partikuläre Lösung f_p von $y^{(4)} - 6y^{(3)} + 10y^{(2)} = 3\sin(x) + 120x + 8$, indem man eine partikuläre Lösung f_{p_1} von $y^{(4)} - 6y^{(3)} + 10y^{(2)} = 3\sin(x)$ und eine partikuläre Lösung f_{p_2} von $y^{(4)} - 6y^{(3)} + 10y^{(2)} = 120x + 8$ bestimmt und diese beiden addiert: $f_p = f_{p_1} + f_{p_2}$.

- Zunächst zu $y^{(4)} - 6y^{(3)} + 10y^{(2)} = 3\sin(x)$:
  Weil $\pm i$ keine Nullstelle von P ist (keine Resonanz), machen wir den Ansatz

  $$f_{p_1}(x) = x^0(\alpha\cos(x) + \beta\sin(x)) = \alpha\cos(x) + \beta\sin(x).$$

  Viermaliges Ableiten ergibt

  $$\begin{aligned} f'_{p_1}(x) &= \beta\cos(x) - \alpha\sin(x), \\ f^{(2)}_{p_1}(x) &= -\alpha\cos(x) - \beta\sin(x), \\ f^{(3)}_{p_1}(x) &= -\beta\cos(x) + \alpha\sin(x), \\ f^{(4)}_{p_1}(x) &= \alpha\cos(x) + \beta\sin(x). \end{aligned}$$

Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$(6\beta - 9\alpha)\cos(x) + (-6\alpha - 9\beta)\sin(x) = 3\sin(x)$$

und damit $6\beta - 9\alpha = 0$ und $-6\alpha - 9\beta = 3$, das heisst $\alpha = -\frac{2}{13}$ und $\beta = -\frac{3}{13}$. Also

$$f_{p_1}(x) = -\frac{2}{13}\cos(x) - \frac{3}{13}\sin(x).$$

- Jetzt zu $y^{(4)} - 6y^{(3)} + 10y^{(2)} = 120x + 8$:
  Weil 0 eine zweifache Nullstelle von P ist (Resonanz), machen wir den Ansatz

  $$f_{p_2}(x) = (\alpha x + \beta)x^2 = \alpha x^3 + \beta x^2.$$

  Viermaliges Ableiten ergibt

  $$\begin{aligned} f'_{p_2}(x) &= 3\alpha x^2 + 2\beta x, \\ f^{(2)}_{p_2}(x) &= 6\alpha x + 2\beta \\ f^{(3)}_{p_2}(x) &= 6\alpha, \\ f^{(3)}_{p_2}(x) &= 0. \end{aligned}$$

  Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so erhält man

  $$\begin{aligned} -36\alpha + 10(6\alpha x + 2\beta) &= 120x + 8 \\ 60\alpha x + (-36\alpha + 20\beta) &= 120x + 8 \end{aligned}$$

  und damit $60\alpha = 120$ und $-36\alpha + 20\beta = 8$, das heisst $\alpha = 2$ und $\beta = 4$. Also $f_{p_2}(x) = x^2(2x+4)$.

Insgesamt erhalten wir $f_p(x) = f_{p_1}(x) + f_{p_2}(x) = -\frac{2}{13}\cos(x) - \frac{3}{13}\sin(x) + x^2(2x+4)$.

SCHRITT 3: In einem dritten und letzten Schritt muss man schließlich noch die oben bestimmte allgemeine homogene Lösung und die oben bestimmte partikuläre Lösung addieren:

$$\begin{aligned} f(x) &= f_h(x) + f_p(x) \\ &= a + bx + ce^{3x}\cos(x) + de^{3x}\sin(x) - \frac{2}{13}\cos(x) - \frac{3}{13}\sin(x) + x^2(2x+4) \quad \text{mit} \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

um die gesuchte allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu bekommen.

(b) Die Lösungen, welche die Bedingung

$$f(0) = \frac{11}{13}$$

erfüllen, sind die Lösungen, deren Parametern erfüllen die folgende Gleichung:

$$a + c - \frac{2}{13} = \frac{11}{13},$$

das heisst $c = 1 - a$. Die gesuchte Lösungen sind dann

$$f(x) = a + bx + (1-a)e^{3x}\cos(x) + de^{3x}\sin(x) - \frac{2}{13}\cos(x) - \frac{3}{13}\sin(x) + x^2(2x+4) \quad \text{mit} \quad a,b,d \in \mathbb{R},$$

und sie hängen von drei Parametern ab.

Aufgabe 3 (*10 Punkte*)

Gegeben sind

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h(x) := \begin{pmatrix} 4e^{x} \\ -8e^{-2x} \end{pmatrix}.$$

(a) (*4 Punkte*) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

(b) (*1 Punkt*) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems

$$y' = Ay\,.$$

(c) (*5 Punkte*) Bestimmen Sie *alle* Lösungen des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$y' = Ay + h(x)\,.$$

(a) Dazu berechnet man mit Hilfe des charakteristischen Polynoms

$$q(\lambda) = det(A - \lambda I_2) = (\lambda - 5)(\lambda + 3) = 0$$

die Eigenwerte der Matrix A: $\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = 5.$

Als nächstes bestimmt man die Eigenvektoren indem man das lineare Gleichungssystem $(A - \lambda_k I_2) = 0$ löst. Dadurch erhält man die Eigenvektoren:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Daraus ergibt sich das Fundamentalsystem

$$f_1(x) = e^{-3x} v_1,\ f_2(x) = e^{5x} v_2.$$

Und die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 \begin{pmatrix} -2e^{-3x} \\ e^{-3x} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2e^{5x} \\ e^{5x} \end{pmatrix}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(c) $f_1(x), f_2(x)$ ist ein Fundamentalsystem mit Wronski-Matrix

$$W(x) = \begin{pmatrix} -2e^{-3x} & 2e^{5x} \\ e^{-3x} & e^{5x} \end{pmatrix}$$

Das inverse der Wronski-Matrix ist

$$W(x)^{-1} = -1/4 \begin{pmatrix} e^{3x} & -2e^{3x} \\ -e^{-5x} & -2e^{-5x} \end{pmatrix}$$

Mit der Methode der Variation der Konstanten nach Satz 6.6.1 ergibt sich

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = W(x)^{-1}h(x) = \begin{pmatrix} -e^{4x} - 4e^{x} \\ e^{-4x} - 4e^{-7x} \end{pmatrix}$$

und damit durch Integrieren

$$\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4e^{4x} - 4e^{x} \\ -1/4e^{-4x} + 4/7e^{-7x} \end{pmatrix}.$$

Damit ist die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems von der Form

$$\begin{aligned} f(x) &= c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_1(x) f_1(x) + c_2(x) f_2(x) \\ &= c_1 \begin{pmatrix} -2e^{-3x} \\ e^{-3x} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2e^{5x} \\ e^{5x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 64/7e^{-2x} \\ -1/2e^{x} - 24/7e^{-2x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (*8 Punkte*) Gegeben ist die 2π-periodische Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x \in [-\pi, 0), \\ x^2 & \text{für } x \in [0, \pi), \end{cases} \qquad f(x + 2\pi) = f(x).$$

(a) (*6 Punkte*) Berechnen Sie die reelle Fourier-Reihe von f.

(b) (*2 Punkte*) Bestimmen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert der Fourier-Reihe.

(a) Die Funktion $f(x)\cos(nx)$ ist auf dem Intervall $(-\pi, \pi)$ ungerade, daher ist ihre Integral auf diesem Intervall gleich null und die Fourierreihe von f ist eine reine Sinusreihe:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \qquad a_n = 0.$$

Man kann das natürlich auch berechnen:

$$\begin{aligned} a_n =& \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sign}(x) \cdot x^2 \cos(nx)\, dx \\ =& \frac{1}{\pi} \Bigg(\underbrace{\int_{-\pi}^{0} -x^2 \cos(nx)\, dx}_{x=-y,\, dx \mapsto -dy,\, 0 \mapsto 0,\, -\pi \mapsto \pi} + \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx)\, dx \Bigg) \\ =& \frac{1}{\pi} \left(\int_{\pi}^{0} y^2 \cos(ny)\, dy + \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx)\, dx \right) \\ =& \frac{1}{\pi} \left(- \int_0^{\pi} y^2 \cos(ny)\, dy + \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx)\, dx \right) \; = \; 0. \end{aligned}$$

Desweiteren gilt

$$\begin{aligned} b_n =& \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin(nx)\, dx \\ =& \frac{2}{\pi} \cdot \left(- \frac{x^2}{n} \cos(nx)\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \cos(nx)\, dx \right) \\ =& -2\pi \cdot \frac{(-1)^n}{n} + \frac{4}{\pi n} \left(\frac{x}{n} \sin(nx)\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin(nx)\, dx \right) \\ =& -\frac{2\pi}{n} \cdot (-1)^n - \frac{4}{\pi n^2} \left(-\frac{1}{n} \cos(nx)\Big|_0^{\pi} \right) \\ =& -\frac{2\pi}{n} \cdot (-1)^n - \frac{4}{\pi n^3} \Big(1 - (-1)^n \Big). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Fourierreihe

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{2\pi}{n} \cdot (-1)^n - \frac{4}{\pi n^3} \Big(1 - (-1)^n \Big) \right] \sin(nx).$$

(b) Die Funktion f ist stetig differenzierbar auf dem Intervall $(-\pi, \pi)$ und die Fourierreihe konvergiert hier daher gegen den Funktionswert von f. An der Unstetigkeitsstelle $x_0 = \pi$ (bzw $x_0 = -\pi$) gilt

$$\lim_{h \to 0, h>0} f'(x_0 + h) = \lim_{h \to 0, h>0} f'(x_0 - h) = 2\pi.$$

Also konvergiert die Fourierreihe von f in $x \in \pi\mathbb{Z}$ gegen den Mittelwert

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{h \to 0, h>0} f(x+h) + \lim_{h \to 0, h>0} f(x-h) \right) = \frac{1}{2}(\pi^2 + (-(-\pi)^2)) = 0.$$