Modulprüfung Hm-1 & Hm-2

2016/17

04.09.2017

- Es gibt 9 Aufgaben. Die jeweilige Punktzahl steht am linken Rand.
- Die Maximalpunktzahl ist 56. Zum Bestehen der Klausur sind 24 Punkte hinreichend.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
- Abgaben in Bleistift oder Rotstift sind ebenfalls nicht zugelassen.
- Bei den Aufgaben 2–4 werden nur die Endergebnisse in den Kästchen gewertet. Bei allen anderen Aufgaben sind alle Argumentations- und Rechenschritte ausführlich zu begründen.
- Tragen Sie bitte Namen, Matrikelnummer sowie Studiengang ein.
- Und nun – viel Erfolg!

Name Matr-Nr Fach

1	2	3	4	5	6	7	8	9		$\sum$

⟨8⟩ ▸ **Aufgabe 1**

a. Untersuchen Sie die Reihe $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n!}}{n}$ auf Konvergenz.

b. Untersuchen Sie ebenso die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ auf Konvergenz.

c. Berechnen Sie den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{2n} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

d. Zeigen Sie: Konvergiert die reelle Reihe $\displaystyle\sum_{n=9}^{\infty} a_n$, so gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

⟨4⟩ ▸ **Aufgabe 2**

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

a. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} = \boxed{}$

b. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{-3n} = \boxed{}$

c. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{\sin(x^2)} = \boxed{}$

d. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2017^n + 2016^n} = \boxed{}$

⟨6⟩ ▸ **Aufgabe 3**

Geben Sie jeweils eine Stammfunktion an.

a. $\displaystyle\int \sin x \cos x \,\mathrm{d}x = \boxed{}$

b. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - x - 2}\,\mathrm{d}x = \boxed{}$

c. $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \boxed{}$

d. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}} = \boxed{}$

⟨6⟩ ▸ **Aufgabe 4**

Bestimmen Sie für die gegebene Funktion jeweils das Taylorpolynom dritten Grades zum angegebenen Entwicklungspunkt x_0. Die Koeffizienten können dabei auch negativ sein.

a. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ mit $x_0 = 1$:

$$T_3 f(x,1) = \boxed{} + \boxed{}\,(x-1) + \boxed{}\,(x-1)^2 + \boxed{}\,(x-1)^3$$

b. $f(x) = x^2 - 2x + 42$ mit $x_0 = 2$:

$$T_3 f(x,2) = \boxed{} + \boxed{}\,(x-2) + \boxed{}\,(x-2)^2 + \boxed{}\,(x-2)^3$$

c. $f(x) = \sqrt{1+x}$ mit $x_0 = 0$:

$$T_3 f(x,0) = \boxed{} + \boxed{}\,x + \boxed{}\,x^2 + \boxed{}\,x^3$$

⟨8⟩ ▸ **Aufgabe 5**

Sei $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und A eine reelle 2×2-Matrix. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

a. Ist $f(-1) = -f(1)$, so ist $f'(t) < 0$ für ein $t \in (-1,1)$.

b. Besitzt f bei $t = -1$ ein Minimum, so ist $f'(-1) \leqslant 0$.

c. Ist A diagonalisierbar, so ist A invertierbar.

d. Gilt $\det A < 0$, so sind alle Eigenwerte von A negativ.

⟨6⟩ ▸ **Aufgabe 6**

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$.

a. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

b. Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

c. Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bestehend aus Eigenvektoren von A.

⟨8⟩ **Aufgabe 7**

Gegeben sei die Funktion

$$f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = (xy-1)\mathrm{e}^{-x}.$$

a. Bestimmen und skizzieren Sie die Nullstellenmenge von f, also die Menge

$$N_0 = \{(x,y) : f(x,y) = 0\} \subset \mathbb{R}^2.$$

b. Markieren Sie in dieser Skizze die Bereiche

$$M_+ = \{(x,y) : f(x,y) > 0\}, \qquad M_- = \{(x,y) : f(x,y) < 0\}.$$

c. Bestimmen Sie ∇f, Hf und Δf.

d. Bestimmen und klassifizieren Sie alle kritischen Punkte der Funktion f.

⟨5⟩ **Aufgabe 8**

Gegeben ist die Differenzialgleichung

$$x^2 y' = y + 1. \tag{†}$$

a. Bestimmen Sie alle Lösungen von (†).

b. Bestimmen Sie diejenige Lösung, für die $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ gilt.

c. Zeichnen Sie diese spezielle Lösung über dem Intervall $(0, 10)$.

⟨5⟩ **Aufgabe 9**

a. Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene E mit den Punkten

$$A = (1, 0, -1), \quad B = (2, 2, 0), \quad C = (1, 1, -1).$$

b. Bestimmen Sie den Schnitt von E mit der Ebene

$$F = \{(x, y, z)^\top : x - y + z + 1 = 0\}.$$

c. Bestimmen Sie den Schnittwinkel zwischen E und F.