Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Simon Barth, M.Sc., Andreas Bitter, M.Sc.,
Jan Köllner, M.Sc., Dr. Matthew Pressland
FB Mathematik, Universität Stuttgart

HM I/II (2016/17) – Musterlösungen

Lösung 1.

(a) Da $n!$ für $n \geq 2$ gerade ist, gilt

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n!}}{n} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$ 2

(b) Die Reihe konvergiert nach dem Quotientenkriterium, denn

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \to \frac{1}{4} < 1 \quad (n \to \infty).$$ 2

(c) Die Summanden lassen sich berechnen zu

$$\int_n^{2n} \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-n} - \mathrm{e}^{-2n}.$$ 1

Folglich gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{2n} \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-2n} = \frac{1}{1-\frac{1}{\mathrm{e}}} - \frac{1}{1-\frac{1}{\mathrm{e}^2}} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^2 - 1}$$ 1

unter Verwendung der Summationsformel für die geometrische Reihe.

(d) Die Konvergenz der Reihe ist nach Definition äquivalent zur Konvergenz der Folge der Partialsummen $S_n = \sum_{k=9}^{n} a_n$. Weil $\mathbb{R}$ vollständig ist, ist dies äquivalent dazu, dass $(S_n)_{n \geq 9}$ eine Cauchyfolge bildet. Damit folgt insbesondere 1

$$a_n = S_n - S_{n-1} \to 0 \quad (n \to \infty).$$ 1

Korrekturanmerkung:

- **Bei Aufgabenteil (a) gibt es einen Punkt, wenn man erkennt, dass es sich bei der Reihe um die harmonische Reihe handelt, einen weiteren, wenn man sich daran erinnert, dass diese divergiert.**
- **In Teil (b) gibt es einen Punkt für das richtige Berechnen des Quotienten und einen weiteren für die richtige Schlussfolgerung mittels des Quotientenkriteriums. Selbstverständlich kann man hier auch anders argumentieren**

Lösung 2.

(a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} = \boxed{0}$$ 1

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{3}{n}\right)^{-3n} = \boxed{\mathrm{e}^{-9}}$$ 1

(c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{\sin(x^2)} = \boxed{1}$$ 1

(d)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2017^n + 2016^n} = \boxed{2017}$$ 1

Lösung 3.

(a)

$$\int \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \boxed{-\tfrac{1}{2}\cos^2(x) \text{ oder } \tfrac{1}{2}\sin^2(x)}$$ 1.5

(b)

$$\int \frac{1}{x^2-x-2}\mathrm{d}x = \boxed{\tfrac{1}{3}\left(\ln|x-2| - \ln|x+1|\right)}$$ 1.5

(c)

$$\int e^{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \boxed{2e^{\sqrt{x+1}}\left(\sqrt{x+1}-1\right)}$$ 1.5

(d)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}} = \boxed{2\arctan\left(\sqrt{x}\right)}$$ 1.5

Korrekturanmerkung:

Ist die grobe Struktur der Funktion zu erkennen, dann werden die Punkte wie folgt vergeben:

- **Bei falschen oder fehlenden Vorfaktoren gibt es einen halben Punkt Abzug.**
- **Bei fehlenden Betragsstrichen gibt es einen halben Punkt Abzug.**
- **Bei Vorzeicheichenfehlern gibt es einen halben Punkt Abzug.**

Lösung 4.

(a) $f(x) = \frac{1}{x^3}$ mit $x_0 = 1$:

$$T_3(x,1) = \boxed{1} + \boxed{-3}(x-1) + \boxed{6}(x-1)^2 + \boxed{-10}(x-1)^3$$ 2

(b) $f(x) = x^2 - 2x + 42$ mit $x_0 = 2$:

$$T_3(x,2) = \boxed{42} + \boxed{2}(x-2) + \boxed{1}(x-2)^2 + \boxed{0}(x-2)^3$$ 2

(c) $f(x) = \sqrt{1+x}$ mit $x_0 = 0$:

$$T_3(x,0) = \boxed{1} + \boxed{\tfrac{1}{2}}x + \boxed{-\tfrac{1}{8}}x^2 + \boxed{\tfrac{1}{16}}x^3$$ 2

Korrekturanmerkung:

Für jedes richtig ausgefüllte Kästchen gibt es 0.5 Punkte, für falsch oder nicht ausgefüllte Kästchen 0 Punkte.

Lösung 5.

(a) Die Aussage ist falsch. 1
Als einfaches Gegenbeispiel kann man die Funktion mit $f(x) = 0$ wählen. Diese ist offensichtlich stetig differenzierbar auf $[-1,1]$ und erfüllt

$$f(-1) = 0 = -f(1).$$

Es ist aber $f'(t) = 0$ für alle $t \in (-1,1)$.
Etwas komplizierter kann man die Funktion mit $f(x) = x$ wählen. Diese ist ebenfalls offensichtlich stetig differenzierbar auf $[-1,1]$ und erfüllt

$$f(-1) = -1 = -f(1).$$

Es ist aber $f'(t) = 1 > 0$ für alle $t \in (-1,1)$. 1

(b) Die Aussage ist falsch. 1
Als einfaches Gegenbeispiel kann man die Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ wählen. Diese besitzt in -1 ein Minimum, da f auf $[-1,1]$ monoton steigt. Für die Ableitung gilt aber $f'(x) = 1$, d.h. auch $f'(-1) = 1 > 0$. 1

(c) Die Aussage ist falsch. 1
Ein einfaches Gegenbeispiel ist durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 1

gegeben. Diese ist diagonalisierbar (da sie bereits Diagonalgestalt hat), jedoch nicht invertierbar, da $\det A = 0$.

(d) Die Aussage ist falsch. 1
Ein einfaches Gegenbeispiel ist durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$ 1

gegeben. Es ist $\det A = -1 < 0$, die Eigenwerte sind aber gerade ± 1, insbesondere ist einer der beiden Eigenwerte positiv.
Angenommen die Matrix besitzt zwei Eigenwerte λ_1 und λ_2, so ist $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2$. Ist also $\det A < 0$, so müssen λ_1 und λ_2 verschiedene Vorzeichen haben.

Lösung 6.

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 6 & -11 & 6-\lambda \end{pmatrix} &= \lambda^2(6-\lambda) + 6 - 11\lambda \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3). \end{aligned}$$ 1

(b) Die Gleichung

$$\chi_A(\lambda) = 0$$

liefert die Lösungen (Eigenwerte)

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 2 \qquad \text{und} \qquad \lambda_3 = 3.$$ 1.5

(c) Der Eigenraum $\mathrm{Eig}(A, \lambda_1)$ zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ ist gegeben durch den Kern der Matrix

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 6 & -11 & 5 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 6 & -11 & 5 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$ 0.5

Durch Rückwärtseinsetzen ergibt sich

$$x_3 = x_2 = x_1.$$

Damit ist der Vektor

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ 0.5

ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_1.
Die zu dem Eigenwert $\lambda_2 = 2$ dazugehörige Koeffizientenmatrix lautet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & -11 & 4 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 4 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ 0.5

Durch Rückwärtseinsetzen ergibt sich

$$x_3 = 2x_2 \qquad \text{und} \qquad x_2 = 2x_1.$$

Damit ist der Vektor

$$v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$ 0.5

ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_2.
Die zu dem Eigenwert $\lambda_3 = 3$ dazugehörige Koeffizientenmatrix lautet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 6 & -11 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$ 0.5

Durch Rückwärtseinsetzen ergibt sich

$$x_3 = 3x_2 \qquad \text{und} \qquad x_2 = 3x_1.$$

Damit ist der Vektor

$$v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$ 0.5

ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_3.
Da Eigenvektoren einer Matrix zu paarweise verschiedenen Eigenwerten stets linear unabhängig sind, bildet

$$B := \{v_1, v_2, v_3\}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$. 0.5

Korrekturanmerkung:

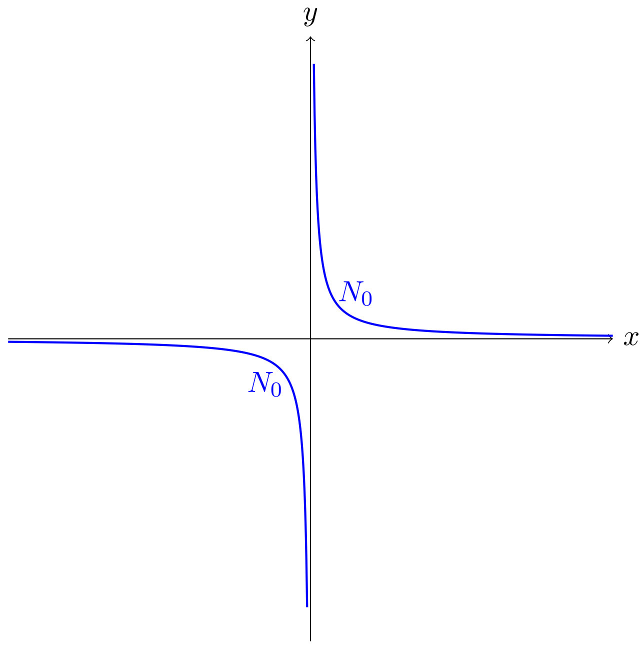
- **Bei Aufgabeteil (a) gibt es einen halben Punkt für die Matrix und einen halben Punkt für das Ausrechnen der Determinante.**
- **Bei Aufgabeteil (b) gibt es für jeden richtigen Eigenwert einen halben Punkt.**
- **Bei Aufgabenteil (c) muss begründet werden, dass die ausgerechneten Vektoren linear unabhängig sind (Nachrechnen oder Vorlesung zitieren).**

Lösung 7.

(a) Die Nullstellenmenge N_0 ist charakterisiert durch

$$f(x,y) = (xy-1)\mathrm{e}^{-x} = 0 \iff (xy-1) = 0 \iff y = \frac{1}{x}.$$

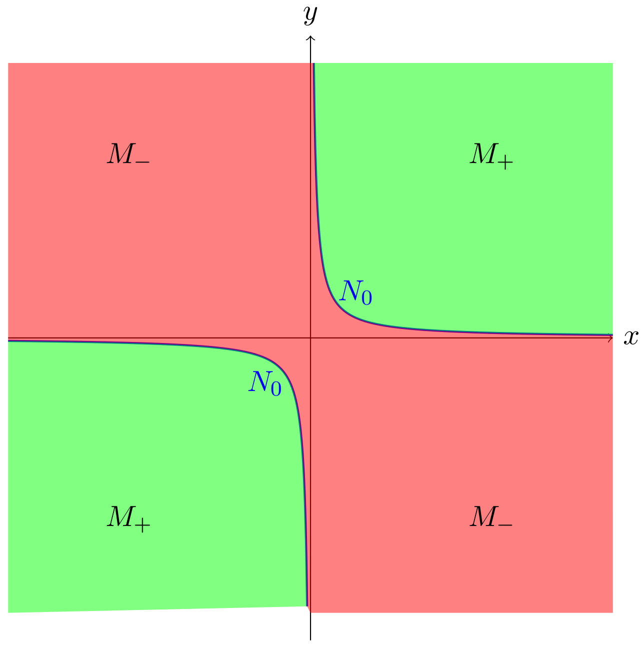
0.5



0,5

(b) Es gilt

$$f(x,y) > 0 \iff xy-1 > 0 \iff y > \frac{1}{x},$$
$$f(x,y) < 0 \iff xy-1 < 0 \iff y < \frac{1}{x}.$$



1

(c) Es gilt

$$\nabla f(x,y) = \mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix} -xy+y+1 \\ x \end{pmatrix}, \quad \text{1}$$

$$Hf(x,y) = \mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix} (x-2)y-1 & -x+1 \\ -x+1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{1}$$

$$\Delta f(x,y) = \mathrm{e}^{-x}\left((x-2)y-1\right). \quad \text{1}$$

(d) Aus $\nabla f(x,y)=0$ folgt $x=0$, wie man sofort sieht. Daraus folgt $y+1=0$, also $y=-1$. Somit ist $(0,-1)$ der einzige kritische Punkt. Weiter gilt

$$Hf(0,-1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

also $\det Hf(0,-1) = -1$, d.h. f hat in $(0,-1)$ einen Sattelpunkt. 3

Korrekturanmerkung:

- **In Aufgabenteil (a) gibt es jeweils einen halben Punkt für das Bestimmen und das Skizzieren der Nullstellenmenge.**
- **In Aufgabenteil (b) gibt es für das richtige Markieren der beiden Mengen jeweils einen halben Punkt.**
- **In Aufgabenteil (d) gibt es einen halben Punkt, wenn man $\nabla f(x,y)=0$ setzt. Einen weiteren Punkt gibt es für die richtige Bestimmung des kritischen Punktes. Weiter gibt es jeweils einen halben Punkt für die Berechnung der Hessematrix im kritischen Punkt, die Begründung ihrer Indefinitheit sowie die Schlussfolgerung, dass es sich um einen Sattelpunkt handelt.**

Lösung 8.

(a) Man sieht sofort, dass die Funktion mit $y(x)=-1$ für alle $x\in\mathbb{R}$ die gegebene Differentialgleichung löst. Für die weiteren Lösungen nehmen wir an, dass $y(x)\neq -1$ für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt. Nach Trennung der Variablen ist 1

$$\frac{y'}{y+1} = \frac{1}{x^2}$$

bzw.

$$\ln|y+1| = \int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + \tilde{c}. \quad \text{1}$$

für ein $\tilde{c}\in\mathbb{R}$. Auflösen dieser Gleichung durch Fallunterscheidung $y \gtrless -1$ liefert letztendlich

$$y_c(x) = c\cdot \mathrm{e}^{-1/x} - 1 \quad \text{1}$$

mit $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Die konstante Lösung $y=-1$ ist darin für $c=0$ enthalten.

(b) Es ist

$$\lim_{x\to\infty} y_c(x) = c\cdot \mathrm{e}^{-\lim_{x\to\infty} 1/x} - 1 = c\cdot \mathrm{e}^0 - 1 = c-1. \quad \text{1}$$

Die Bedingung $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ liefert also, dass $c=1$.

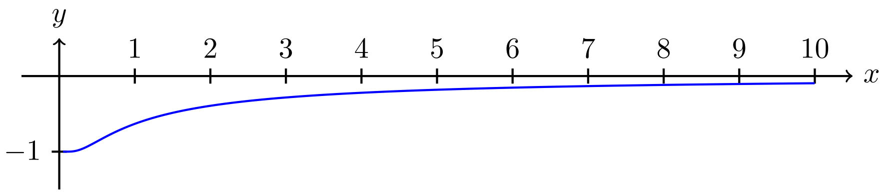
(c) Für $x \to 0$ divergiert $1/x$ bestimmt gegen $+\infty$, d.h. es ist

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{-1/x} = 0$$

bzw. $\lim_{x\to 0} y(x) = -1$. Für $x \to \infty$ haben wir in Teilaufgabe **(b)** y gerade so bestimmt, dass $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ gilt.
Betrachten wir die Ableitung von y, so erhalten wir

$$y'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \mathrm{e}^{-1/x} > 0$$

für alle $x \in (0, 10)$. D.h. y ist monoton steigend. Desweiteren ist $\lim_{x\to 0} y'(x) = 0$. Zusammengefasst können wir von y folgendes Bild zeichnen:



1

Korrekturanmerkung:

- **In Teilaufgabe (a) wird der erste Punkt nur vergeben, wenn der Fall $y = -1$ abgedeckt wurde.**
- **Bewertungskriterien für das Bild in Teilaufgabe (c):**
  Der Punkt wird vergeben, wenn
  - **das asymptotische Verhalten korrekt eingezeichnet ist.**
  - **der Graph eine monoton steigende Funktion zeigt.**
  - **die Tangente an den Graphen bei $x = 0$ einigermaßen waagerecht verläuft.**

  Ein halber Punkt wird abgezogen, wenn
  - **die Tangente an den Graphen bei $x = 0$ nicht waagerecht verläuft oder**
  - **das Koordinatensystem nicht ausreichend beschriftet ist.**

  Weitere Begründungen sind nicht verlangt.

Lösung 9.

(a) Die Richtungsvektoren $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ sind gegeben durch

$$\overline{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \overline{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eine mögliche Darstellung der Ebene E ist z.B.

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;:\; r, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

1

© jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de poschel@mathematik.uni-stuttgart.de
andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de

(b) Die Schnittbedingung lautet

$$1 + r - (2r + s) + (-1 + r) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad s = 1.$$ 1

Eine mögliche Darstellung der Schnittmenge $E \cap F$ ist z.B.

$$E \cap F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \; : \; r \in \mathbb{R} \right\}.$$ 1

(c) Der Normalenvektor n_E der Ebene E ist

$$n_E = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ 0.5

und der Normalenvektor n_F der Ebene F ist

$$n_F = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$ 0.5

Aus

$$\langle n_E, n_F \rangle = 0$$ 0.5

folgt für den Schnittwinkel φ unmittelbar

$$\varphi = \frac{\pi}{2}.$$ 0.5

Korrekturanmerkung:

Die Normalenform und die Koordinatenform sind ebenfalls mögliche Darstellungen und sind mit voller Punktzahl zu bewerten.