Universität Stuttgart

Apl. Prof. Dr. W.-P. Düll
Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Klausur

für Studierende der Fachrichtungen
inf, swt

Bitte unbedingt beachten:

- Bitte beschriften Sie jeden Ihrer Zettel mit Namen und Matrikelnummer.
- Legen Sie Ihren Studentenausweis gut sichtbar vor sich auf den Tisch.
- Verwenden Sie **keinen Bleistift oder Rotstift.**
- **Taschenrechner, Mobiltelefone etc. sind nicht zugelassen.**
- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 10 eigenhändig beschriebene DIN-A4 Seiten.
- Bei den **Aufgaben 1, 4c), 5, 6, 7 und 9** sind die vollständigen Argumentationsschritte anzugeben. Bei den **Aufgaben 2, 3, 4a)b), 8 und 10** wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt, Nebenrechnungen werden hier nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- In dieser Klausur können bis zu **50 Punkte** erreicht werden.
- Nach der Klausur legen Sie bitte Ihre beschriebenen Blätter in den gefalteten Umschlagbogen hinein.
- Wann die Prüfungsergebnisse vorliegen, wird auf der Homepage der Vorlesung bekanntgegeben.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*4 Punkte*) Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $n^3 - n$ ein Vielfaches von 3.

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Aufgabe 2 (*1+1+2+2 Punkte*) Seien $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^4 + 16 = 0,$$

wobei z_1 diejenige Lösung ist, für die $\arg(z_1) \in (0, \frac{\pi}{2})$ ist.

a) Bestimmen Sie das Argument von z_1:

$\arg(z_1) =$ $\boxed{}$

b) Bestimmen Sie den Betrag von z_1:

$|z_1| =$ $\boxed{}$

c) Stellen Sie z_1 in kartesischen Koordinaten dar:

$$z_1 = \boxed{} + \boxed{}\, i$$

d) Bestimmen Sie die Summe aller Lösungen:

$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 =$ $\boxed{}$

Aufgabe 3 (*1+2 Punkte*) Gegeben sei die reelle Matrix:

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \alpha \\ 0 & 1-\alpha & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix B_α in Abhängigkeit von α:

$\det(B_\alpha) =$ $\boxed{}$

b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das homogene lineare Gleichungssystem $B_\alpha x = 0$ nicht-triviale Lösungen $x \in \mathbb{R}^3$?

$\alpha =$ $\boxed{}$

Aufgabe 4 (*2+2+3 Punkte*) Gegeben sei die reelle Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ von A an:

$$\chi_A(\lambda) = \boxed{}$$

b) Einer der Eigenwerte von A ist $\lambda_1 = -2$. Geben Sie einen zugehörigen Eigenvektor v_1 an:

$$v_1 = \boxed{}$$

c) Bestimmen Sie die zwei anderen Eigenwerte λ_2 und λ_3 von A. **Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.**

Aufgabe 5 (*2+2+2 Punkte*) Gegeben sei eine Matrix A mit Eigenwerten $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2$ und zugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie eine kurze Begründung, ohne dabei die Matrix A explizit zu berechnen. Ohne Begründung gibt es für die Angabe "Wahr" oder "Falsch" keine Punkte. Bei falschen Antworten gibt es keine Minuspunkte.

a) A ist diagonalisierbar;

b) A ist invertierbar;

c) A ist symmetrisch.

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Aufgabe 6 (*1+2+2 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(4-2n)^3}{n^3+1}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2-3n+2}-\sqrt{n^2+1}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x}$

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Aufgabe 7 (*2+2 Punkte*)

a) Entscheiden Sie, ob die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)},$$

konvergiert, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

b) Bestimmen Sie der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n.$$

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Aufgabe 8 (*2+1 Punkte*) Gegeben sei die Funktion $f\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin(x^2)$.

a) Bestimmen Sie die folgenden Ableitungen:

$f'(x) =$

$f''(x) =$

b) Geben Sie für f das Taylorpolynom der zweiten Stufe um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an:

$T_2(f, x, 0) =$

Aufgabe 9 (*2+2+2 Punkte*)

a) Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx.$$

b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = 2x\sqrt{1+x^2}.$$

c) Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist, und geben Sie eine kurze Begründung. Ohne Begründung gibt es für die Angabe "Wahr" oder "Falsch" keine Punkte. Bei einer falschen Antwort gibt es keine Minuspunkte.

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann existiert eine stetige Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\, dt$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Aufgabe 10 (*1+1+3+1 Punkte*) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = xy + y - x^4.$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten von f:

$\nabla f(x,y) =$

b) Bestimmen Sie den (einzigen) stationären Punkt von f:

$P_1 : (x_1, y_1) =$

c) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von f:

$H_f(x,y) =$

sowie die Determinante:

$\det(H_f(x,y)) =$

d) Bestimmen Sie für den stationären Punkt von f, ob f dort ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder einen Sattelpunkt besitzt. Geben Sie eine mathematische Begründung für Ihre Entscheidung.

Die Funktion f besitzt ein(en) $\boxed{}$ in P_1.

Mathematische Begründung: