Universität Stuttgart

Apl. Prof. Dr. W.-P. Düll
Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Klausur

für Studierende der Fachrichtungen
inf, swt

Bitte unbedingt beachten:

- Bitte beschriften Sie jeden Ihrer Zettel mit Namen und Matrikelnummer.
- Legen Sie Ihren Studentenausweis gut sichtbar vor sich auf den Tisch.
- Verwenden Sie **keinen Bleistift oder Rotstift.**
- **Taschenrechner, Mobiltelefone etc. sind nicht zugelassen.**
- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 10 eigenhändig beschriebene DIN-A4 Seiten.
- Bei den **Aufgaben 1, 4c), 5, 6, 7 und 9** sind die vollständigen Argumentationsschritte anzugeben. Bei den **Aufgaben 2, 3, 4a)b), 8 und 10** wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt, Nebenrechnungen werden hier nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- In dieser Klausur können bis zu **50 Punkte** erreicht werden.
- Nach der Klausur legen Sie bitte Ihre beschriebenen Blätter in den gefalteten Umschlagbogen hinein.
- Wann die Prüfungsergebnisse vorliegen, wird auf der Homepage der Vorlesung bekanntgegeben.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*4 Punkte*) Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$\text{Für jedes } n \in \mathbb{N} \text{ ist } n^3 - n \text{ ein Vielfaches von } 3.$$

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Lösung: Zu zeigen:

$$A(n) : 3 \mid n^3 - n$$

ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

- 'Induktionsanfang':

$$A(1) : 3 \mid 0 = 1^3 - 1 \text{ ist wahr.}$$

- 'Induktionsschritt': Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} A(n) \text{ ist Wahr } &\Rightarrow 3 \mid n^3 - n + 3n^2 + 3n = (n+1)^3 - (n+1) \\ &\Rightarrow A(n+1) \text{ ist Wahr.} \end{aligned}$$

- 'Induktionsschluss': Nach dem Induktionsprinzip gilt dann:

$$A(n) \text{ ist wahr } n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 2 (*1+1+2+2 Punkte*) Seien $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^4 + 16 = 0,$$

wobei z_1 diejenige Lösung ist, für die $\arg(z_1) \in (0, \frac{\pi}{2})$ ist.

a) Bestimmen Sie das Argument von z_1:

$$\arg(z_1) = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

b) Bestimmen Sie den Betrag von z_1:

$$|z_1| = \boxed{2}$$

c) Stellen Sie z_1 in kartesischen Koordinaten dar:

$$z_1 = \boxed{\sqrt{2}} + \boxed{\sqrt{2}}\, i$$

d) Bestimmen Sie die Summe aller Lösungen:

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = \boxed{0}$$

Aufgabe 3 (*1+2 Punkte*) Gegeben sei die reelle Matrix:

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \alpha \\ 0 & 1-\alpha & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix B_α in Abhängigkeit von α:

$$\det(B_\alpha) = \boxed{(1-\alpha)(2+3\alpha) \text{ or } 2+\alpha-3\alpha^2}$$

b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das homogene lineare Gleichungssystem $B_\alpha x = 0$ nicht-triviale Lösungen $x \in \mathbb{R}^3$?

$$\alpha = \boxed{1, -\tfrac{2}{3}}$$

Aufgabe 4 (*2+2+3 Punkte*) Gegeben sei die reelle Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ von A an:

$$\chi_A(\lambda) = \boxed{-\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda - 12}$$

b) Einer der Eigenwerte von A ist $\lambda_1 = -2$. Geben Sie einen zugehörigen Eigenvektor v_1 an:

$$v_1 = \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

c) Bestimmen Sie die zwei anderen Eigenwerte λ_2 und λ_3 von A. **Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.**

Lösung: $\chi_A(\lambda)$ ist teilbar durch $\lambda + 2$. Durch Polynomdivision erhalten wir $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda - 12 = -(\lambda+2)(6-6\lambda+\lambda^2)$. Lösen von $6 - 6\lambda + \lambda^2 = 0$ mit der Mitternachtsformel ergibt $\lambda_2 = 3 + \sqrt{3}$ und $\lambda_3 = 3 - \sqrt{3}$.

Aufgabe 5 (*2+2+2 Punkte*) Gegeben sei eine Matrix A mit Eigenwerten $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2$ und zugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie eine kurze Begründung, ohne dabei die Matrix A explizit zu berechnen. Ohne Begründung gibt es für die Angabe "Wahr" oder "Falsch" keine Punkte. Bei falschen Antworten gibt es keine Minuspunkte.

a) A ist diagonalisierbar;
Lösung: Wahr, weil die (3×3)-Matrix A drei verschiedene Eigenwerte besitzt.

b) A ist invertierbar;
Lösung: Falsch. Weil 0 ein Eigenwert von A ist, gilt $\operatorname{Kern}(A) \neq \{0\}$. Also, A ist nicht injektiv und somit nicht invertierbar.

c) A ist symmetrisch.
Lösung: Falsch. Die Eigenvektoren von A sind nicht orthogonal: $\langle v_1, v_3 \rangle = -1 \neq 0$. Also, weil die Eigenvektoren von symmetrischen Matrizen zu verschiedene Eigenwerte orthogonal sind, kann A nicht symmetrisch sein.

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Aufgabe 6 (*1+2+2 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{a)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{(4-2n)^3}{n^3+1} \qquad \text{b)}\ \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2-3n+2} - \sqrt{n^2+1} \qquad \text{c)}\ \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$$

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Lösung: Wir berechnen (unter Verwendung der Regel von de l'Hospital bei Teilaufgabe c)):

$$\text{a)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{(4-2n)^3}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{4}{n}-2)^3}{1+\frac{1}{n}} = (-2)^3 = -8$$

$$\text{b)}\ \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2-3n+2} - \sqrt{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-3n+2-n^2+1}{\sqrt{n^2-3n+2}+\sqrt{n^2+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-3+\frac{3}{n}}{\sqrt{1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{-3}{2}$$

$$\text{c)}\ \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} \overset{\text{`}\frac{0}{0}\text{'}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}}{1} = 2.$$

Aufgabe 7 (*2+2 Punkte*)

a) Entscheiden Sie, ob die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)},$$

konvergiert, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Lösung: Es gilt

$$0 < \ln(n) \leqq \ln(n+1),$$

für alle $n \in \mathbb{N}_{\geqq 2}$. Damit ist die Folge $\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}_{\geqq 2}}$ monoton fallend. Es gilt außerdem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0.$$

Also konvergiert die Reihe nach dem Leibniz-Kriterium.

b) Bestimmen Sie der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n.$$

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Lösung: Wir berechnen

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n(n+1)^2}{2^{n+1}n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

Also, die Konvergenzradius ist $\frac{1}{2}$.

Aufgabe 8 (*2+1 Punkte*) Gegeben sei die Funktion $f\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin(x^2)$.

a) Bestimmen Sie die folgenden Ableitungen:

$$f'(x) = \boxed{2x\cos(x^2)}$$

$$f''(x) = \boxed{2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)}$$

b) Geben Sie für f das Taylorpolynom der zweiten Stufe um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an:

$$T_2(f, x, 0) = \boxed{x^2}$$

Aufgabe 9 *(2+2+2 Punkte)*

a) Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \cos\left(\tfrac{x}{4}\right) dx.$$

Lösung: Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x\cos(\frac{1}{4}x)$ ist ungerade. Daher gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \cos\left(\tfrac{x}{4}\right) dx = 0.$$

b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = 2x\sqrt{1+x^2}.$$

Lösung: Durch Substitution $u = 1 + x^2$ mit $du = 2xdx$ ergibt sich:

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}dx = \int \sqrt{u}du = \int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C,$$

mit $C \in \mathbb{R}$.

c) Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist, und geben Sie eine kurze Begründung. Ohne Begründung gibt es für die Angabe "Wahr" oder "Falsch" keine Punkte. Bei einer falschen Antwort gibt es keine Minuspunkte.

> Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann existiert eine stetige Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
>
> $$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\, dt$$
>
> für alle $x \in \mathbb{R}$.

Lösung: Da f stetig ist, existiert nach dem Hauptsatz der Integralrechnung eine (differenzierbare) Stammfunktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt,$$

und $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Weil differenzierbare Funktionen stetig sind, ist F insbesondere stetig.

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Aufgabe 10 (*1+1+3+1 Punkte*) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = xy + y - x^4.$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten von f:

$\nabla f(x,y) =$ $\boxed{(y - 4x^3, x+1)}$

b) Bestimmen Sie den (einzigen) stationären Punkt von f:

$P_1 : (x_1, y_1) =$ $\boxed{(-1,-4)}$

c) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von f:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -12x^2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sowie die Determinante:

$\det(H_f(x,y)) =$ $\boxed{-1}$

d) Bestimmen Sie für den stationären Punkt von f, ob f dort ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder einen Sattelpunkt besitzt. Geben Sie eine mathematische Begründung für Ihre Entscheidung.

Die Funktion f besitzt ein(en) $\boxed{\text{Sattelpunkt}}$ in P_1.

Mathematische Begründung:

Weil $\det(H_f(-1,-4)) = \begin{vmatrix} -12 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$, besitzt f nach dem Hurwitz-Kriterium einen Sattelpunkt in $P_1 = (-1,-4)$.