Institut für Geometrie und Topologie
Universität Stuttgart

Prof. Dr. W. Kimmerle

Höhere Mathematik III   Diplomvorprüfung   2. September 2003

2. Klausur

für Studierende der Fachrichtungen **bau, immo**

Klausur

für Studierende der Fachrichtungen **enan, famo, mach, umw, tema**

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120** Minuten. Verlangt und gewertet werden **alle Aufgaben**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 25 handbeschriebene DIN A4–Blätter sowie Zeichenmaterial. Nicht erlaubt sind insbesondere Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengeräte.
- Bei den **Aufgaben 1 und 2** sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitung separate Blätter.
- Bei den **Aufgaben 3 und 4** sind nur die Ergebnisse verlangt. Tragen Sie diese in die dafür vorgesehenen Felder auf den Aufgabenblättern ein.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem ??. 10. 2003 im NWZ II, Pfaffenwaldring 57, 7. Stock, durch Aushang bekanntgegeben.

  Viel Erfolg!!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, und bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich bis zum ??. 10. 2003 in Raum V57.7.346 einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (15 Punkte)

Gegeben sei das von dem reellen Parameter α abhängige Vektorfeld $v = (v_1, v_2)^T$ mit

$$v(x,y) = \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x^2+\alpha y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \right), \quad (x,y) \neq (0,0).$$

a) Zeigen Sie, dass v im Punkt (0,0) durch $v(0,0) = (0,0)$ stetig ergänzbar ist.

b) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an, damit v in einem Gebiet G ein Gradientenfeld ist. Bestimmen Sie insbesondere das zugehörige α.

c) Zeigen Sie, dass $f(x,y) = y\sqrt{x^2+y^2}$ eine Stammfunktion von v für das in b) bestimmte α ist.

d) Berechnen Sie für $\alpha = 2$ das Integral $\int_{C_1} v\,dx$ für den Weg $C_1 : x(t) = \cos t, y(t) = \sin t, \ \frac{1}{4}\pi \leq t \leq \frac{5}{4}\pi$.

e) Der Weg C_2 sei die geradlinige Verbindung von $P_1 = (-1,-1)$ und $P_2 = (1,1)$. Berechnen Sie nun für beliebiges α das Integral $\int_{C_2} v\,dx$.

Aufgabe 2 (15 Punkte)

a) Bestimmen Sie für das autonome System

$$\begin{aligned} x'(t) &= 1 \\ y'(t) &= y + 3z \\ z'(t) &= 2y + 2z \end{aligned}$$

durch Lösung des Phasen-Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= y + 3z \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= 2y + 2z \end{aligned}$$

ein erstes Integral.

b) Zeigen Sie: $v(x,y,z) = \frac{1}{5}e^x y - \frac{1}{5}e^x z$ ist eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$v_x + (y+3z)v_y + (2y+2z)v_z = 0\,.$$

Bestimmen Sie eine weitere Lösung der partiellen Differentialgleichung, die zu $v(x,y,z)$ linear unabhängig ist.

Name: | | **Mat.-Nr.:** | |

Aufgabe 3 (15 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f : [-2,2] \times [-2,2] \to \mathbb{R}\,,$$
$$f(x,y) = x^4 - 2x^2 - y^4 + 2y^2\,.$$

Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von f:

$f_x = \boxed{}$, $f_y = \boxed{}$

$f_{xx} = \boxed{}$, $f_{xy} = \boxed{}$

$f_{yx} = \boxed{}$, $f_{yy} = \boxed{}$

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f und tragen Sie sie sortiert nach Typ in die unten stehende Tabelle ein:

lokale Minima:					
lokales Maxima:					
Sattelpunkte:					

Bestimmen Sie den minialen und den maximalen Funktionswert von f:

$\min f = \boxed{}$, $\max f = \boxed{}$.

Aufgabe 4 (15 Punkte)

TODO – Alte Version:

Im $\mathbb{R}^3$ sei die Fläche $S = \{(x, y, z) | (x + 1)^2 + yz = 0, z \leq y \leq z + 2\}$ gegeben.

Berechnen Sie Funktionalmatrix $A = \dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$ und Funktionaldeterminante $|A|$ der Transformation $y = u + w,\ x = v - 1,\ z = u - w$.

$A =$ $\boxed{}$, $|A| =$ $\boxed{}$

Beschreiben Sie S in (u, v, w) - Koordinaten: $S = \{(u, v, w) |$ $\boxed{}$ $\}$

Skizzieren Sie S im (u, v, w) - System: $\boxed{}$

Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung $(u, v, w) = X(r, \varphi)$ von S mit Hilfe von Zylinderkoordinaten und einen zugehörigen Normalenvektor $N(r, \varphi)$.

$X(r, \varphi) =$ $\boxed{}$, $N(r, \varphi) =$ $\boxed{}$

Ergänzen Sie das Zweifach–Integral so, dass es den Flächeninhalt $F(S)$ von S beschreibt und berechnen Sie $F(S)$.

$$\int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \boxed{} \, \mathrm{d}\boxed{} \, \mathrm{d}\boxed{} = \boxed{}$$

Berechnen Sie den geometrischen Schwerpunkt SP von S im (u, v, w) - System.

$u_{SP} =$ $\boxed{}$, $v_{SP} =$ $\boxed{}$, $w_{SP} =$ $\boxed{}$

Wie lautet die z - Koordinate des Schwerpunkts von S im (x, y, z) - System ?

$z_{SP} =$ $\boxed{}$