Klausur zur Höheren Mathematik 1/2

für **Ingenieurstudiengänge**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 6** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 7 – 10** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\sinh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos(x)$	$\frac{1}{\left(\cos(x)\right)^2}$	$\cosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos(x)$	$\arctan(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 9.4.2018 über das C@MPUS–Portal (`https://campus.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **16.4.2018** bis **18.4.2018** einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*6 Punkte*)

(a) Gegeben sei die komplexe Zahl $z = \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{4}\mathrm{i}$. Bestimmen Sie den Betrag $|z|$ sowie das Argument $\varphi \in [0, 2\pi)$ von z.

(b) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $w^3 = \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{4}\mathrm{i}$. Geben Sie die Lösungen in Polarkoordinaten an.

(c) Skizzieren Sie die Menge $M = \left\{ u \in \mathbb{C} \,\middle|\, |2u - \overline{u}| \leqq 3 \right\}$ in der komplexen Zahlenebene.

Aufgabe 2 (*6 Punkte*) Gegeben sei die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{k^2+2k}$.

(a) Berechnen Sie die vierte Partialsumme der obigen Reihe.

(b) Führen Sie eine reelle Partialbruchzerlegung des Ausdrucks $\frac{6}{x^2+2x}$ durch.

(c) Bestimmen Sie den Wert der obigen Reihe.

Aufgabe 3 (*6 Punkte*)

(a) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ sei ein Vektorfeld $g_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch $g_\alpha(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2\alpha x_2 - x_2 \\ 2\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 x_1 + 3x_2^2 \end{pmatrix}$ definiert. Für welche Parameter α besitzt g_α ein Potential?
Geben Sie für jeden dieser Parameterwerte ein Potential an.

(b) Gegeben sei die Kurve K mit Parametrisierung $C\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto C(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $\displaystyle\int_K g_{\frac{1}{2}}(x) \bullet \mathrm{d}x$.

Aufgabe 4 (*6 Punkte*)

Gegeben seien die Basen $A\colon a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ für $\mathbb{R}^2$

und $B\colon b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ für $\mathbb{R}^3$.

Weiter sei $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit

$$\varphi(b_1) = a_1, \quad \varphi(b_2) = a_2, \quad \varphi(b_3) = 2a_1 - a_2.$$

(a) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen ${}_E\mathrm{id}_A$, ${}_B\mathrm{id}_F$, wobei E bzw. F die Standardbasen von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ sind.

(b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix ${}_A\varphi_B$.

(c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix ${}_E\varphi_F$.

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k \cdot k}{(k+1)(k+2)} = \frac{2^{n+1}}{n+2} - 1.$$

Aufgabe 6 (*12 Punkte*)

Gegeben sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \mathrm{e}^y(y^2 - 2x^2)$ sowie die kompakte Menge M mit

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + y^2 \leqq 6\}.$$

(a) Bestimmen Sie die kritischen Stellen von f und geben Sie jeweils an, ob es sich dabei um ein lokales Minimum bzw. Maximum oder einen Sattelpunkt handelt.

(b) Bestimmen Sie jeweils den größten und kleinsten Wert, den f auf dem Rand von M annimmt.

(c) Bestimmen Sie jeweils den größten und kleinsten Wert, den f auf M annimmt.

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe 7 (*5 Punkte*)

(a) Sei $x > 0$. Berechnen Sie eine Stammfunktion von $\frac{1}{x}\cos(\ln(\sqrt{x}))$.

(b) Sei $x > 0$. Berechnen Sie eine Stammfunktion von $\sqrt{x}\ln(x)$.

Aufgabe 8 (*6 Punkte*) In $\mathbb{R}^3$ sei die Quadrik Q bestimmt durch

$$4x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 + 8x_1x_3 + 2 = 0.$$

(a) Bestimmen Sie eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, einen Vektor $a \in \mathbb{R}^3$ und ein Skalar $c \in \mathbb{R}$ so, dass gilt

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^\intercal A x + 2a^\intercal x + c = 0 \right\}.$$

$A =$, $a =$, $c =$

(b) Geben Sie die Eigenwerte von A sowie jeweils einen zugehörigen Eigenvektor von A an.

(c) Geben Sie ein kartesisches Koordinatensystem für $\mathbb{R}^3$ an, in dem Q euklidische Normalform besitzt.

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius ρ der folgenden Potenzreihen.

	$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{5^k}{7^k+1}x^k$	$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}x^{9k}$	$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k(k!)^2}{(2k)!}x^k$
ρ			

Aufgabe 10 (*7 Punkte*)

(a) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Gegeben sei die Matrix $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & \alpha & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Für welche Werte von α

(i)	ist A_α invertierbar?	
(ii)	ist A_α symmetrisch?	
(iii)	ist A_α diagonalisierbar?	
(iv)	ist A_α orthogonal?	

(b) Sei $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \pi \end{pmatrix}$. Wie lauten die Eigenwerte von B^5?

(c) Gegeben seien die Matrizen C, $D \in \mathbb{R}^{4\times4}$ mit

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Determinanten von C und D.

$\det C = \boxed{}$, $\qquad \det D = \boxed{}$.