

## Klausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

**Aufgabe 1.** Bitte füllen Sie folgendes aus! (1 Punkt)

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Studiengang:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamt
Punkte	/1	/12	/11	/14	/12	/14	/10	/74

## Nützliche Werte

Tabelle der Exponentialfunktion  $e^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$  für ausgewählte Werte von  $x$ :

$x$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
$e^x$	1.11	1.22	1.35	1.49	1.65	1.82	2.01	2.23	2.46	2.72	3.00	3.32	3.67	4.06	4.48	4.95	5.47	6.05	6.69	7.39
$e^{-x}$	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368	.333	.301	.273	.247	.223	.202	.183	.165	.150	.135

Tabelle für das Integral  $\int_0^x \varphi(t) dt$  über die Normalverteilung  $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ :

	$x+0.00$	$x+0.01$	$x+0.02$	$x+0.03$	$x+0.04$	$x+0.05$	$x+0.06$	$x+0.07$	$x+0.08$	$x+0.09$
$x = 0.0$	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41308	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

Ablesebeispiele: Für  $x = 1.23$  gilt  $\int_0^x \varphi(t) dt \approx 0.39065$ . Für  $x = 2.58$  gilt  $\int_0^x \varphi(t) dt \approx 0.49506$ .

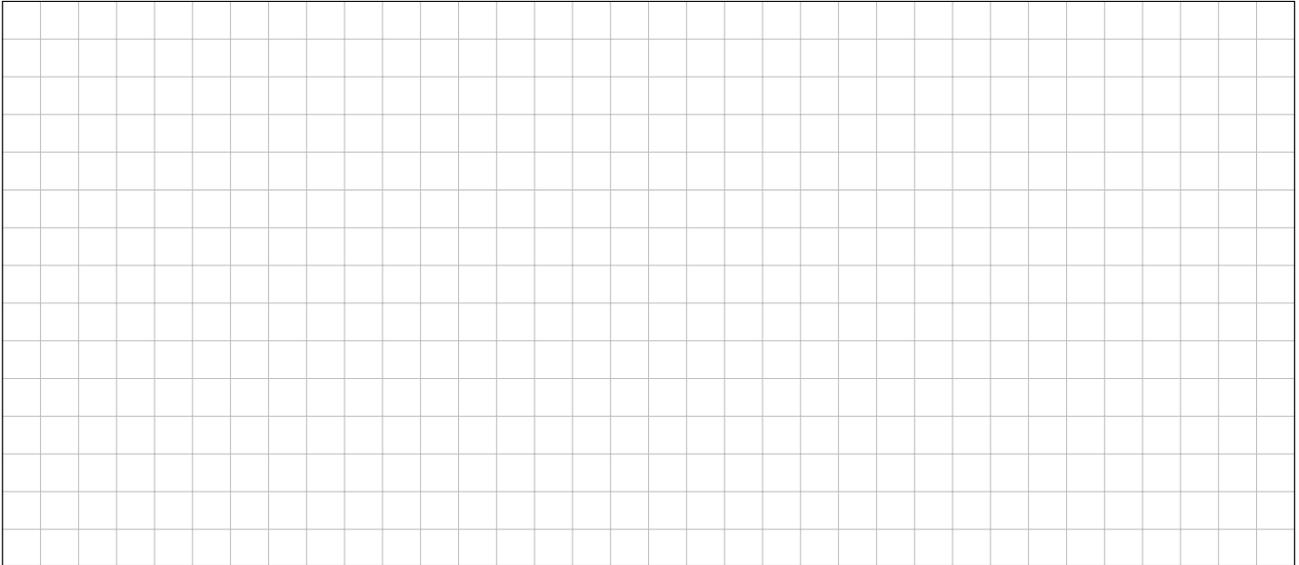
Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.







**3C.** Zur Qualitätskontrolle sortiert eine Maschine gebrauchte Münzen in fünf Kisten. Münzen aus Stuttgart landen mit 80% Wkt in Kiste  $K_3$ , andere Münzen landen mit 20% Wkt in Kiste  $K_3$ . Mit welcher Wahrscheinlichkeit (in %) landet eine zufällige Münze in Kiste  $K_3$ ?



---

2

Sie entnehmen zufällig eine Münze aus der Kiste  $K_3$ . Mit welcher Wahrscheinlichkeit (in %) wurde sie in Stuttgart geprägt?



---

2

**Aufgabe 4.** *Differentialgleichungen* ( $4+3+7 = 14$  Punkte)**4A.** Zu lösen ist die lineare Differentialgleichung  $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 0$ .Bestimmen Sie das zugehörige charakteristische Polynom  $p$  und seine Faktorisierung über  $\mathbb{C}$ :

$$p(x) =$$

Folgern Sie die allgemeine komplexe Lösung  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  unserer Differentialgleichung:

$$y(t) =$$

Folgern Sie die allgemeine reelle Lösung  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  unserer Differentialgleichung:

$$y(t) =$$

**4B.** Bestimmen Sie eine Partikulärlösung  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  von  $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = e^t$ .

$$y(t) =$$

Bestimmen Sie eine Partikulärlösung  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  von  $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = e^{(-2+i)t}$ .

$$y(t) =$$

Bestimmen Sie eine Partikulärlösung  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  von  $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = e^{-2t} \cos(t)$ .

$$y(t) =$$

---

4

---

3

4C. Zu lösen ist für  $u: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: (t, x) \mapsto u(t, x)$  die partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) + 2t \partial_x u(t, x) &= -u(t, x) && \text{für alle } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= \cos(x) && \text{für } t = 0 \text{ und alle } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Geben Sie das charakteristische Differentialgleichungssystem zu  $u(t(s), x(s)) = z(s)$  an:

$$\begin{aligned} t'(s) &= 1, && t(0) = 0, \\ x'(s) &= \boxed{\phantom{0}}, && x(0) = x_0, \\ z'(s) &= \boxed{\phantom{0}}, && z(0) = \cos(x_0). \end{aligned}$$

Bestimmen Sie damit die zugehörige Charakteristik  $s \mapsto (t(s), x(s), z(s))$ :

$$t(s) = s, \quad x(s) = \boxed{\phantom{0}}, \quad z(s) = \boxed{\phantom{0}}$$

Bestimmen Sie damit die gesuchte Lösung:

$$u(t, x) = \boxed{\phantom{0}}$$

Machen Sie schließlich die Probe:

$$\partial_t u(t, x) = \boxed{\phantom{0}}$$

$$2t \partial_x u(t, x) = \boxed{\phantom{0}}$$

**Aufgabe 5.** *Lineare Differentialgleichungssysteme* (2+4+2+4 = 12 Punkte)

Zu lösen ist  $y'(t) = Ay(t)$ . Gegeben sind hierzu die Systemmatrix  $A$  und drei Vektoren:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 5 \\ 3 & 10 & -6 & -9 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 9 & -6 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**5A.** Einer der Vektoren  $u_1, u_2, u_3$  ist ein Eigenvektor von  $A$ : Welcher und zu welchem Eigenwert?

Eigenvektor  $v_1 =$   zum Eigenwert  $\lambda_1 =$

 $\frac{1}{2}$ 

**5B.** Die drei verbleibenden Eigenwerte  $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  von  $A$  sind gleich, berechnen Sie diese:

$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 =$

Einer der Vektoren  $u_1, u_2, u_3$  ist ein Hauptvektor zweiter Stufe von  $A$ . Geben Sie die Hauptvektorkette  $v_3 \mapsto v_2 \mapsto 0$  aus Hauptvektor  $v_3$  und Eigenvektor  $v_2$  an:

$v_3 =$    $\mapsto$   $v_2 =$

Bestimmen Sie  $v_4 \in \mathbb{R}^4$  so, dass  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$  eine Basis aus Hauptvektorketten bildet:

$v_4 =$

 $\frac{1}{4}$

**5C.** Bestimmen Sie die Lösung  $y_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$  mit  $y_1'(t) = A y_1(t)$  und  $y_1(0) = v_1$ .

$$y_1(t) =$$

Bestimmen Sie die Lösung  $y_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$  mit  $y_3'(t) = A y_3(t)$  und  $y_3(0) = v_3$ .

$$y_3(t) =$$

**5D.** Variation der Konstanten: Das inhomogene DGSsystem  $y'(t) = A y(t) - t e^{(t^2/2)-2t} u_3$  mit  $y(0) = 0$  besitzt eine Lösung der Form  $y_p(t) = c(t) e^{-2t} u_3$ . Berechnen Sie:

$$y_p'(t) =$$

$$A y_p(t) =$$

Einsetzen in unser inhomogenes DGSsystem ergibt folgende Differentialgleichung für  $c$ :

$$c'(t) =$$

Die gesuchte Lösung zum Anfangswert  $y(0) = 0$  ist daher:

$$c(t) =$$

---



---

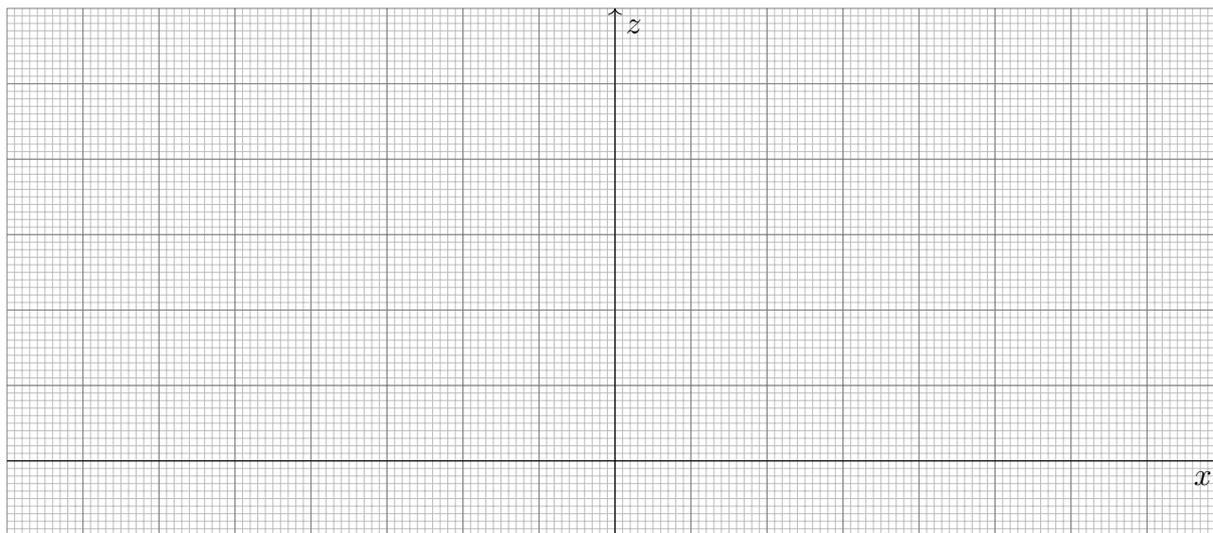


**Aufgabe 6.** *Dreidimensionale Integrale und Integralsätze (3+3+5+3 = 14 Punkte)*

Der Rotationskörper  $K \subset \mathbb{R}^3$  und das Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  seien gegeben durch

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 4 - x^2 - y^2 \leq z \leq 3\sqrt{4 - x^2 - y^2} \right\} \quad \text{und} \quad f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ e^{-x^2} e^{-y^2} \end{pmatrix}.$$

**6A.** Skizzieren Sie den Schnitt von  $K$  mit der  $x$ - $z$ -Ebene, also mit der Ebene  $y = 0$ :



Parametrisieren Sie den Körper  $K$  in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} 0 \leq \rho \leq \boxed{\phantom{000}} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ \boxed{\phantom{000}} \leq z \leq \boxed{\phantom{000}} \end{cases}$$

3

**6B.** Berechnen Sie mit dieser Parametrisierung das Volumen  $\text{vol}_3(K) \approx 25$  des Körpers  $K$ :

$\text{vol}_3(K) =$

3

**6C.** Die Randfläche  $\partial K$  besteht aus dem Boden  $B$  mit  $z = 4 - x^2 - y^2$  und dem Deckel  $D$  mit  $z = 3\sqrt{4 - x^2 - y^2}$ . Wir parametrisieren  $B$  in Zylinderkoordinaten:

$$\Phi_B \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ 4 - \rho^2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi_B}{\partial \rho} \times \frac{\partial \Phi_B}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ -2\rho \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\rho \sin \varphi \\ \rho \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} =$$

Berechnen Sie mit  $\Phi_B$  den Fluss des Vektorfeldes  $f$  durch  $B$ :

$$\int_{s \in B} f(s) \cdot dS =$$

Folgern Sie den Fluss des Vektorfeldes  $f$  aus dem Körper  $K$  durch den Deckel  $D$  nach oben:

$$\int_{s \in D} f(s) \cdot dS =$$

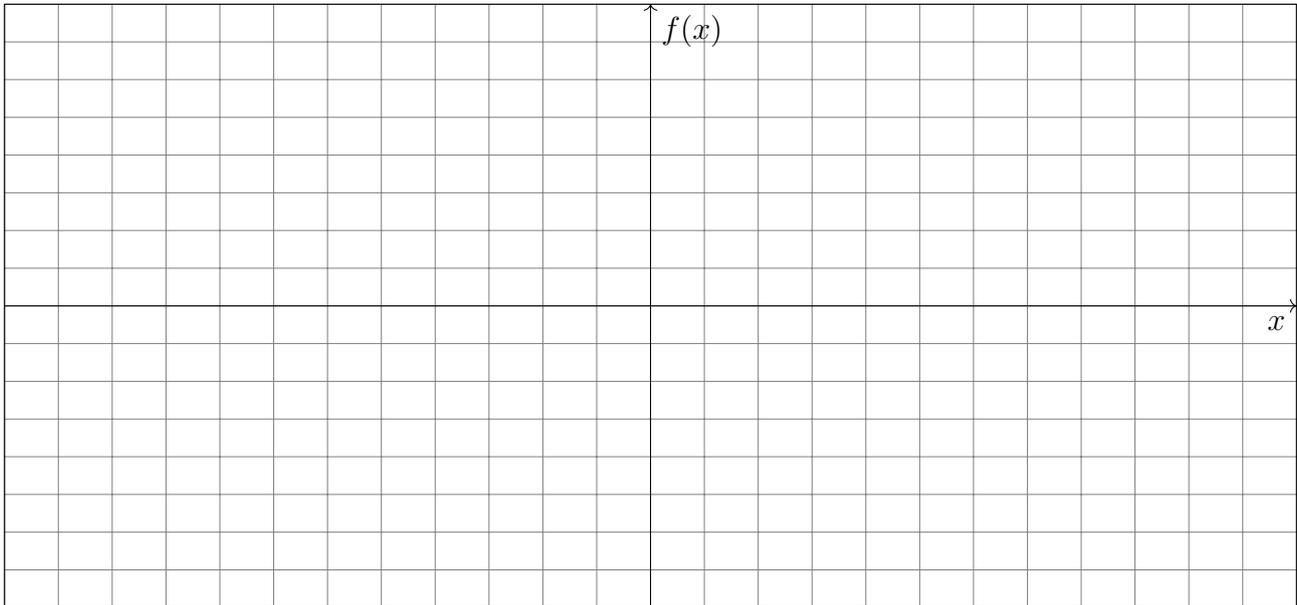
**6D.** Berechnen Sie den Fluss von  $g = \text{rot}(f)$  durch  $B$  nach oben als geeignetes Wegintegral:

$$\int_{s \in B} g(s) \cdot dS =$$

**Aufgabe 7.** *Fourier-Reihen* (2+4+2+2 = 10 Punkte)

Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei  $2\pi$ -periodisch mit  $f(x) = e^x$  für  $-\pi < x \leq \pi$ .

**7A.** Skizzieren Sie die Funktion  $f$  auf dem Intervall  $[-12, 12]$ :

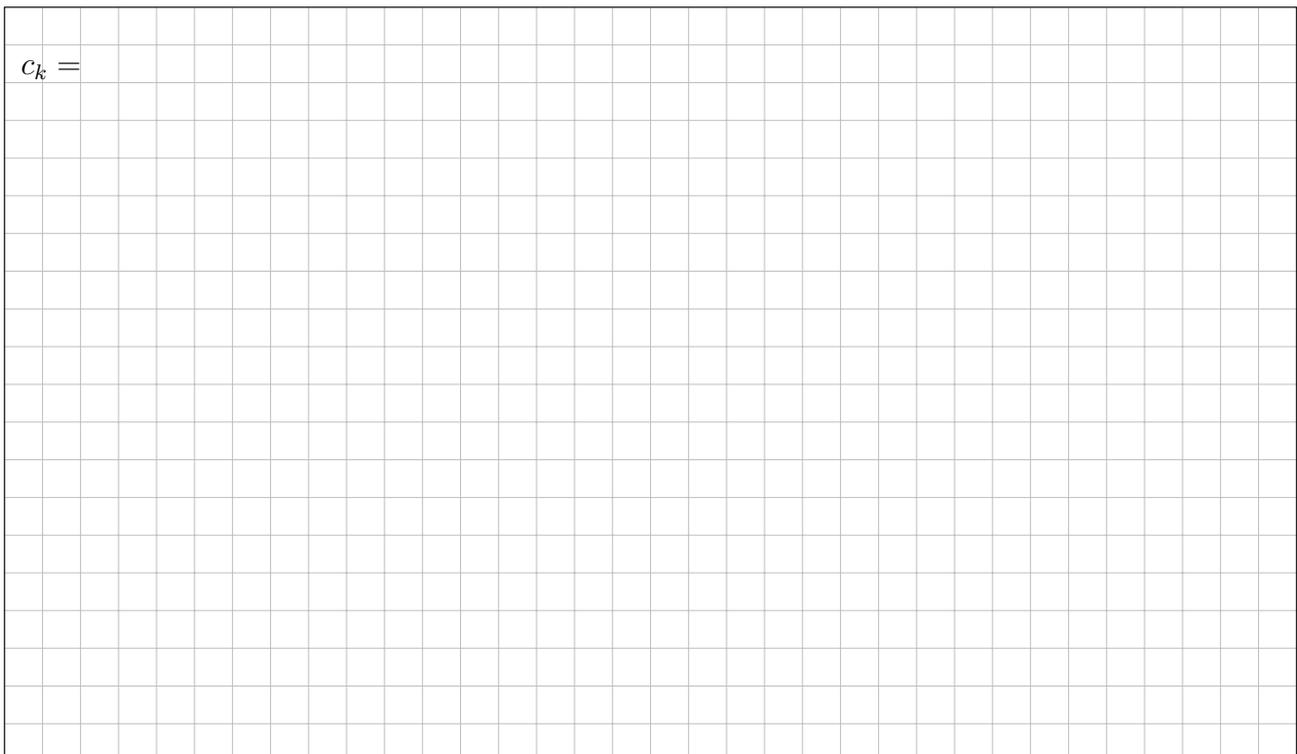


Bestimmen Sie den Grenzwert der Fourier-Reihe  $f_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$  von  $f$  in  $x = \pi$ :

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\pi) =$

$\frac{1}{2}$

**7B.** Bestimmen Sie die Koeffizienten  $c_k$  der komplexen Fourier-Reihe  $f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ :



$\frac{3}{2}$

Bestimmen Sie die Koeffizienten der Fourier-Reihe  $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$ :

$$a_k = \frac{(-1)^k}{\pi(1+k^2)} [e^\pi - e^{-\pi}], \quad b_k =$$

1

**7C.** Bestimmen Sie durch Auswertung der Fourier-Reihe von  $f$  an der Stelle  $x = \pi$  den exakten Wert der Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \frac{1}{26} + \frac{1}{37} + \dots \in [1.0, 1.1]$ .

2

**7D.** Bestimmen Sie die komplexe Fourier-Reihe  $f'(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k e^{ikx}$  der Ableitung  $f'$  von  $f$ .

$$\gamma_k =$$

2

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.