Prof Dr. Jürgen Pöschel
Jan Köllner, M.Sc.
Simon Barth, M.Sc.
Andreas Bitter, M.Sc.
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Modulprüfung Hm 1 & Hm 2

Termin:	*26.02.2018*
Hinweise:	*- Es gibt 9 Aufgaben. Die jeweilige Punktzahl ist angegeben.* *- Die Maximalpunktzahl ist 56. Zum Bestehen der Klausur sind 24 Punkte hinreichend.* *- Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten.* *- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.* *- Abgaben mit Bleistift oder Rotstift sind ebenfalls nicht zugelassen.* *- Bei den Aufgaben 2-4 werden nur die Endergebnisse in den Kästchen gewertet. Bei allen anderen Aufgaben sind alle Argumentations- und Rechenschritte ausführlich zu begründen.* *- Tragen Sie bitte Namen, Matrikelnummer sowie Studiengang ein.* *- Und nun - viel Erfolg!*
Hilfsmittel:	**Keine** *außer Schreibutensilien und leerem Papier. Insbesondere sind Taschenrechner, Handys, Computer und Formelsammlungen nicht erlaubt.*
Bearbeitungszeit:	*180 min*

Name:	**Matrikel-Nr.:**	**Fach:**

Punkte:

A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**	**A8**	**A9**	Σ

Aufgabe 1 (8 Punkte)

(a) Untersuchen Sie die Reihe $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{3n}}{\log(\log(n))}$ auf Konvergenz.

(b) Untersuchen Sie ebenso die Reihe $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sin(n^3)}{n^{3/2}}$ auf Konvergenz.

(c) Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ für welche die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{-nx}}$ konvergiert.

(d) Zeigen Sie: Konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, so konvergiert auch die relle Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^{2017}-1}{1-x^{2016}} = \boxed{}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\tan(x)} = \boxed{}$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \boxed{}$

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right) = \boxed{}$

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Geben Sie jeweils eine Stammfunktion an.

(a) $\displaystyle\int \log(x)\,\mathrm{d}x = \boxed{}$

(b) $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \boxed{}$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-\pi^2}\,\mathrm{d}x = \boxed{}$

(d) $\displaystyle\int x\sin^2(x^2)\,\mathrm{d}x = \boxed{}$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Bestimmen Sie für die gegebene Funktion jeweils das Taylorpolynom dritten Grades zum angegebenen Entwicklungspunkt x_0. Die Koeffizienten können dabei auch negativ sein.

(a) $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ mit $x_0 = 0$:

$$T_3 f(x,0) = \boxed{} + \boxed{}\,x + \boxed{}\,x^2 + \boxed{}\,x^3$$

(b) $f(x) = (x+1)^4 + 3(x+1)^3 + x^2 + 2x + 2$ mit $x_0 = -1$:

$$T_3 f(x,-1) = \boxed{} + \boxed{}\,(x+1) + \boxed{}\,(x+1)^2 + \boxed{}\,(x+1)^3$$

(c) $f(x) = 1/\sqrt{x}$ mit $x_0 = 1$:

$$T_3 f(x,1) = \boxed{} + \boxed{}\,(x-1) + \boxed{}\,(x-1)^2 + \boxed{}\,(x-1)^3$$

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und A eine reelle 2×2-Matrix. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) Gilt $f(-1) = f(1)$, so ist $f'(t) = 0$ für ein t $\in (-1,1)$.

(b) Die Funktion $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) := \frac{\sin(f(x))}{\mathrm{e}^{f(x)}}$ ist auf dem Intervall $[-1,1]$ integrierbar.

(c) Ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert von A, dann ist A nicht invertierbar.

(d) Gilt $\mathrm{Spur}(A) \neq 0$, dann ist A invertierbar.

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie $\det A$.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenvektoren von A.

(c) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix T und ihre Inverse, so dass $T^{-1}AT$ Diagonalform besitzt.

Aufgabe 7 (8 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := (3 - x^2 - y^2)\,\mathrm{e}^{-y}$$

(a) Bestimmen Sie ∇f und Hf.

(b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $p = (1,-1)$ in Richtung $v = (2,1)$.

(c) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktion f.

(d) Geben Sie Art und Lage aller Extrema der Funktion f an.

(e) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades $T_2 f((x,y),(0,-1))$ von f im Entwicklungspunkt $(0,-1)$.

Aufgabe 8 (5 Punkte)
Gegeben ist die Differenzialgleichung

$$y' - y + y^2 x = 0. \tag{1}$$

(a) Verwenden Sie die Substitution $z = \frac{1}{y}$ um die Differenzialgleichung (1) auf die Form

$$z' + z - x = 0 \tag{2}$$

zu bringen.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen der zu (2) gehörigen homogenen Differenzialgleichung und eine Partikulärlösung von (2).

(c) Bestimmen Sie diejenige Lösung von (1), für die $y(1) = \mathrm{e}$ gilt.

Aufgabe 9 (5 Punkte)

(a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten

$$A = (0,1,1), \quad B = (1,0,2), \quad C = (0,1,0).$$

(b) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Ebenen E, welche das Dreieck $\overline{ABC}$ enthält.

(c) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebenen E.

(d) Berechnen Sie den Abstand von E zum Ursprung.