Prof Dr. Jürgen Pöschel
Jan Köllner, M.Sc.
Simon Barth, M.Sc.
Andreas Bitter, M.Sc.
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Modulprüfung Hm 1 & Hm 2

Termin:	*26.02.2018*
Hinweise:	*- Es gibt 9 Aufgaben. Die jeweilige Punktzahl ist angegeben.* *- Die Maximalpunktzahl ist 56. Zum Bestehen der Klausur sind 24 Punkte hinreichend.* *- Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten.* *- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.* *- Abgaben mit Bleistift oder Rotstift sind ebenfalls nicht zugelassen.* *- Bei den Aufgaben 2-4 werden nur die Endergebnisse in den Kästchen gewertet. Bei allen anderen Aufgaben sind alle Argumentations- und Rechenschritte ausführlich zu begründen.* *- Tragen Sie bitte Namen, Matrikelnummer sowie Studiengang ein.* *- Und nun - viel Erfolg!*
Hilfsmittel:	**Keine** *außer Schreibutensilien und leerem Papier. Insbesondere sind Taschenrechner, Handys, Computer und Formelsammlungen nicht erlaubt.*
Bearbeitungszeit:	*180 min*

Name:	**Matrikel-Nr.:**	**Fach:**

Punkte:

A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**	**A8**	**A9**	Σ

© poschel@mathematik.uni-stuttgart.de jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de
simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de

Aufgabe 1 (8 Punkte)

(a) Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{3n}}{\log(\log(n))}$ auf Konvergenz.

(b) Untersuchen Sie ebenso die Reihe $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sin(n^3)}{n^{3/2}}$ auf Konvergenz.

(c) Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ für welche die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{-nx}}$ konvergiert.

(d) Zeigen Sie: Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, so konvergiert auch die relle Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Lösung 1.

(a) Es ist $(-1)^{3n} = ((-1)^3)^n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und daher

$$\frac{(-1)^{3n}}{\log(\log(n))} = \frac{(-1)^n}{\log(\log(n))}$$

eine alternierende Folge. Wegen der Monotonie des Logarithmus ist $n \mapsto \log(\log(n))$ monoton steigend bzw. $n \mapsto 1/\log(\log(n))$ monoton fallend. Die gegebene Reihe konvergiert also nach dem Leibnitzkriterium. **2**

(b) Wegen

$$\left|\frac{\sin(n^3)}{n^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$$ **1**

für alle $n \in \mathbb{N}$ und die da Reihe $\sum_{n=3}^{\infty} n^{-3/2}$ konvergiert, konvergiert auch die gegebene Reihe nach dem Majorantenkriterium. **1**

(c)
- Sei $x = 0$, dann ist

  $$\frac{1}{\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{-nx}} = \frac{1}{2},$$ **0,5**

  insbesondere also keine Nullfolge. Die Reihe divergiert in diesem Fall. **0,5**
- Sei $x > 0$. Wegen

  $$\frac{1}{\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{-nx}} \leq \frac{1}{\mathrm{e}^{nx}} = \left(\frac{1}{\mathrm{e}^{x}}\right)^n$$ **0,25**

  und der Konvergenz der geometrischen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)^n$ konvergiert die gegebene Reihe nach dem Majorantenkriterium. **0,25**
- Sei $x < 0$. Wir gehen analog zum zweiten Fall vor: Es ist

  $$\frac{1}{\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{-nx}} \leq \frac{1}{\mathrm{e}^{-nx}} = \left(\frac{1}{\mathrm{e}^{-x}}\right)^n$$ **0,25**

  und $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{e}^{-x}}\right)^n$ ist wegen $1/\mathrm{e}^{-\mathrm{x}} < 1$ eine konvergente Majorante. **0,25**

Zusammenfassend konvergiert die Reihe für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Im Fall $x = 0$ divergiert die Reihe.

(d) Angenommen es konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, so ist die Folge der Partialsummen eine Cauchyfolge und $\sum_{n=k}^{l} |a_n| < \varepsilon$ für alle $k, l > N$. Aus der Dreiecksungleichung erhält man 1

$$\left| \sum_{n=k}^{l} a_n \right| \leq \sum_{n=k}^{l} |a_n| < \varepsilon,$$ 1

d.h. auch die Partialsummen der Reihe $\sum_{n=k}^{l} a_n$ bilden eine Cauchyfolge und die Reihe muss konvergieren.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^{2017}-1}{1-x^{2016}} = \boxed{-\frac{2017}{2016}}$ **(b)** $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\tan(x)} = \boxed{0}$ 1+1

(c) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \boxed{1}$ **(d)** $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right) = \boxed{1}$ 1+1

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Geben Sie jeweils eine Stammfunktion an.

(a) $\int \log(x)\,\mathrm{d}x = \boxed{x\log(x) - x}$ 1

(b) $\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \boxed{\log(|\sin x|)}$ 1

(c) $\int \frac{1}{x^2-\pi^2}\,\mathrm{d}x = \boxed{\frac{1}{2\pi}\left(\log(|x-\pi|) - \log(|x+\pi|)\right)}$ 2

(d) $\int x\sin^2(x^2)\,\mathrm{d}x = \boxed{\frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}\sin(x^2)\cos(x^2)}$ 2

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Bestimmen Sie für die gegebene Funktion jeweils das Taylorpolynom dritten Grades zum angegebenen Entwicklungspunkt x_0. Die Koeffizienten können dabei auch negativ sein.

(a) $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ mit $x_0 = 0$:

$$T_3 f(x,0) = \boxed{1} + \boxed{2}\,x + \boxed{2}\,x^2 + \boxed{\frac{4}{3}}\,x^3$$

(b) $f(x) = (x+1)^4 + 3(x+1)^3 + x^2 + 2x + 2$ mit $x_0 = -1$:

$$T_3 f(x,-1) = \boxed{1} + \boxed{0}\,(x+1) + \boxed{1}\,(x+1)^2 + \boxed{3}\,(x+1)^3$$

(c) $f(x) = 1/\sqrt{x}$ mit $x_0 = 1$:

$$T_3 f(x,1) = \boxed{1} + \boxed{-\frac{1}{2}}\,(x-1) + \boxed{\frac{3}{8}}\,(x-1)^2 + \boxed{-\frac{5}{16}}\,(x-1)^3$$

Korrekturanmerkung: Jedes richtige Kästchen gibt einen halben Punkt.

Aufgabe 5 (8 Punkte)
Sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und A eine reelle 2×2-Matrix. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) Gilt $f(-1) = f(1)$, so ist $f'(t) = 0$ für ein $\mathrm{t} \in (-1,1)$.

(b) Die Funktion $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) := \frac{\sin(f(x))}{\mathrm{e}^{f(x)}}$ ist auf dem Intervall $[-1,1]$ integrierbar.

(c) Ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert von A, dann ist A nicht invertierbar.

(d) Gilt $\mathrm{Spur}(A) \neq 0$, dann ist A invertierbar.

Lösung 5.

(a) Die Aussage folgt direkt mit dem Satz von Rolle und ist somit wahr. 2

(b) Da $\mathrm{e}^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, ist auch $\mathrm{e}^{f(x)} > 0$. Als Komposition stetiger Funktionen ist

$$x \mapsto \frac{\sin(f(x))}{\mathrm{e}^{f(x)}}$$

damit eine steige Funktion und auf dem kompakten Intervall $[-1,1]$ integrierbar. 1+1
Die Aussage ist damit wahr.

(c) Ist $\lambda = 0$ Eigenwert der Matrix A, so gibt es einen Eigenvektor $v \neq 0$ mit $Av = 0$. Der Kern dieser Matrix ist also nicht $\{0\}$ und A kann nicht invertierbar sein. 1+1
Die Aussage ist also wahr.

(d) Die Aussage ist falsch, ein Gegebeispiel ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$ 1

Zum einen ist $\mathrm{Spur}\, A = 1 + 1 = 2 \neq 0$, zum anderen ist aber $\det A = 1 - 1 = 0$ und A damit nicht invertierbar. 1

Korrekturanmerkung: Es werden ausschließlich Punkte auf die Begründungen vergeben.

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie $\det A$.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenvektoren von A.

(c) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix T und ihre Inverse, so dass $T^{-1}AT$ Diagonalform besitzt.

Lösung 6.

(a) Es ist

$$\det A = 1 - 1 = 0. \qquad \text{1}$$

(b) Einen der Eigenvektoren kann man sofort sehen: Es sollte $(0, 0, 1)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 sein:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{1}$$

Es bleibt also nurnoch die 2×2-Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ zu betrachten. Die Eigenvektoren sind hier $(1, 1)$ und $(1, -1)$, da

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ergänzen wir $(1, 1)$ und $(1, -1)$ in der letzten Komponente durch Null, so erhalten wir daraus Eigenvektoren von A. 2

(c) Offenbar ist eine solche Matrix durch

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{1}$$

gegeben. Ihre Inverse erhält man durch Transponieren und Division durch ihre Determinante: Es ist

$$T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{1}$$

Aufgabe 7 (8 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := (3 - x^2 - y^2)\,\mathrm{e}^{-y}$$

(a) Bestimmen Sie ∇f und Hf.

(b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $p = (1,-1)$ in Richtung $v = (2,1)$.

(c) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktion f.

(d) Geben Sie Art und Lage aller Extrema der Funktion f an.

(e) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades $T_2 f((x,y),(0,-1))$ von f im Entwicklungspunkt $(0,-1)$.

Lösung 7.

(a) Der Gradient ist gegeben durch

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x\,\mathrm{e}^{-y} \\ -2y\,\mathrm{e}^{-y} - (3 - x^2 - y^2)\,\mathrm{e}^{-y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x\,\mathrm{e}^{-y} \\ (x^2 + y^2 - 2y - 3)\,\mathrm{e}^{-y} \end{pmatrix}.$$ 1

Die Hessematrix ist gegeben durch

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2\,\mathrm{e}^{-y} & 2x\,\mathrm{e}^{-y} \\ 2x\,\mathrm{e}^{-y} & (1 + 4y - y^2 - x^2)\,\mathrm{e}^{-y} \end{pmatrix}.$$ 1

(b) Mit Hilfe des Gradienten erhält man die Richtungsableitung

$$D_v f(1,-1) = \nabla f(1,-1) \cdot v = \begin{pmatrix} -2\mathrm{e} \\ \mathrm{e} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -3\mathrm{e}.$$ 1

(c) Die kritischen Punkte sind Lösungen der Gleichung $\nabla f(x,y) = 0$. Da $\mathrm{e}^{-y} > 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$, verschwindet die erste Komponente nur für $x = 0$. Eingesetzt in die zweite Komponente führt dies auf

$$y^2 - 2y - 3 = (y-1)^2 - 4 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad |y - 1| = 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = -1 \vee y = 3.$$ 1

Wir erhalten also die beiden kritischen Punkte $p_1 = (0,-1)$ und $p_2 = (0,3)$. 1

(d) Wir überprüfen die Hessematrix in den kritischen Punkten. Es ist

$$H_f(0,-1) = \begin{pmatrix} -2\,\mathrm{e} & 0 \\ 0 & -4\mathrm{e} \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist negativ definit, da alle Eigenwerte negativ sind, bei p_1 liegt somit ein lokales Extremum vor. 1
Es ist

$$H_f(0,3) = \begin{pmatrix} -6\,\mathrm{e}^{-3} & 0 \\ 0 & 4\mathrm{e}^{-3} \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist indefinit, da die beiden Eigenwerte verschiedene Vorzeichen haben. Bei p_2 liegt also kein lokales Extremum vor. 1

(e) Es ist $f(0,-1) = 2\mathrm{e}$, $\nabla f(0,-1) = (0,0)^T$ und

$$H_f(0,-1) = \begin{pmatrix} -2\,\mathrm{e} & 0 \\ 0 & -4\mathrm{e} \end{pmatrix}$$

von oben. Damit ist

$$T_2 f((x,y),(0,-1)) = 2\mathrm{e} + \frac{1}{2}(x, y+1) \begin{pmatrix} -2\,\mathrm{e} & 0 \\ 0 & -4\mathrm{e} \end{pmatrix} \big(x, y+1\big) = 2\mathrm{e} - \mathrm{e}\, x^2 - 2\mathrm{e}\,(y+1)^2.$$

Aufgabe 8 (5 Punkte)
Gegeben ist die Differenzialgleichung

$$y' - y + y^2 x = 0. \tag{1}$$

(a) Verwenden Sie die Substitution $z = \frac{1}{y}$ um die Differenzialgleichung (1) auf die Form

$$z' + z - x = 0 \tag{2}$$

zu bringen.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen der zu (2) gehörigen homogenen Differenzialgleichung und eine Partikulärlösung von (2).

(c) Bestimmen Sie diejenige Lösung von (1), für die $y(1) = \mathrm{e}$ gilt.

Lösung 8.

(a) Sei $z = 1/y$, dann folgt mit der Kettenregel, dass $z' = -y'/y^2$ und damit

$$y' - y + y^2 x = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad -\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} - x = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z' + z - x = 0.$$ 1

(b) Die homogene Differentialgleichung lautet $z' + z = 0$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass alle Lösungen durch

$$z_c(x) = c \cdot \mathrm{e}^{-x}$$ 1

mit $c \in \mathbb{R}$ gegeben sind.
Eine Lßoung des homogenen Problems lässt sich ebenfalls leicht raten: Der Ansatz $z(x) = ax+b$ führt auf die Lösung $z_p(x) = x - 1$. 1

(c) Die Lösungen von (2) sind gegeben durch

$$z(x) = c \cdot \mathrm{e}^{-x} + x - 1.$$

Durch Resubstitution erhält man daraus alle Lösungen von (1):

$$y(x) = \frac{1}{c \cdot \mathrm{e}^{-x} + x - 1}.$$

Einsetzten der Bedingung $y(1) = \mathrm{e}$ liefert

$$y(1) = \frac{1}{c \cdot \mathrm{e}^{-1} + 1 - 1} = \frac{\mathrm{e}}{c} \overset{!}{=} \mathrm{e},$$ 1

also $c = 1$. Die Gesuchte Lösung ist damit 1

$$y(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^{-x} + x - 1}.$$

Aufgabe 9 (5 Punkte)

(a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten

$$A = (0, 1, 1), \quad B = (1, 0, 2), \quad C = (0, 1, 0).$$

(b) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Ebenen E, welche das Dreieck $\overline{ABC}$ enthält.

(c) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebenen E.

(d) Berechnen Sie den Abstand von E zum Ursprung.

Lösung 9.

(a) Das Dreick wird von den beiden Vektoren

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad AC = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

aufgespannt. Der Flächeninhalt ist also gegeben durch

$$|\Delta_{ABC}| = \frac{1}{2} \cdot |AB \times AC| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$ 1

(b) Eine Parameterdarstellung der Ebene E ist gegeben durch

$$E : x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$ 1

mit $s, t \in \mathbb{R}$.

(c) Der Normalenvektor wurde bereits in Teilaufgabe **(a)** ausgerechnet, es ist $n = (1, 1, 0)^T$, dieser weißt bereits vom Ursprung weg und muss nurnoch normiert werden, man erhält

$$n_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$ 1

Die Hessesche Normalenform ist nun gegeben durch

$$E : 0 = \langle n_0, x - OA \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$ 1

(d) Aus der Hessesche Normalenform der Ebene E aus Teilaufgabe **(c)** ließt man den Abstand $1/\sqrt{2}$ zum Ursprung ab. 1