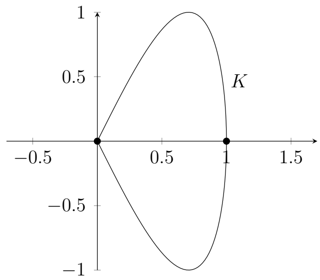
**Aufgabe 1** (*8 Punkte*)




Es seien eine Kurve $K \subseteqq \mathbb{R}^2$ mit Parametrisierung $C : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$ und ein Vektorfeld $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$C(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin 2t \end{pmatrix}, \qquad g(x,y) := \begin{pmatrix} -4y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

**(a)** (*3 Punkte*) Berechnen Sie die Zirkulation $Z(g,K)$ von $g$ längs $K$.
*Hinweis:* $\sin(2x)\sin x + \cos(2x)\cos x = \cos x$

**(b)** (*1 Punkt*) Berechnen Sie $\operatorname{rot} g$.

**(c)** (*2 Punkte*) Ermitteln Sie den Flächeninhalt des von $K$ berandeten Gebietes $S$.
*Hinweis: Benutzen Sie a) und b)*

**(d)** (*2 Punkte*) Berechnen Sie den Ausfluss $A(g,K)$ von $g$ durch $K$.

---

**(a)**

$$\begin{aligned} Z(g,K) &= \int_K g \cdot \mathrm{d}s \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(C(t)) \cdot C'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} -4\sin 2t \\ 2\cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ 2\cos 2t \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\ &= 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)\sin t + \cos(2t)\cos t\,\mathrm{d}t \\ &= 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,\mathrm{d}t \\ &= 4[\sin t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 8 \end{aligned}$$

**(b)** $\operatorname{rot} g = \partial_1 g_2 - \partial_2 g_1 = 2 - (-4) = 6$.

**(c)**

$$\begin{aligned} F(S) &= \iint_S 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &\overset{b)}{=} \frac{1}{6}\iint_S \operatorname{rot} g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{6}\int_K g \cdot \mathrm{d}s \\ &\overset{a)}{=} \frac{4}{3} \end{aligned}$$

**(d)**

$$\begin{aligned} A(g,K) &= \int_K g \cdot n \,\mathrm{d}s \\ &= \int_S \operatorname{div} g \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= 0. \end{aligned}$$

**Aufgabe 2** (*11 Punkte*) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y^{(3)} - 2y^{(2)} + 4y' - 8y = x^2 + 1 + 2e^{2x} .$$

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung.

---

**SCHRITT 1:** In einem ersten Schritt löst man die homogene Gleichung $y^{(3)} - 2y^{(2)} + 4y' - 8y = 0$. Das charakteristische Polynom $P(X)$ dieser Differentialgleichung ist $P(X) = X^3 - 2X^2 + 4X - 8$. Eine offensichtliche Nullstelle von $P$ ist $2$.

$$P(X) = X^3 - 2X^2 + 4X - 8 = (X-2)(X^2+4) = (X-2)(X+2i)(X-2i)$$

und hat die übrigen Nullstellen $\pm 2i$.
Die allgemeine homogene Lösung $f_h$ ist dann:

$$f_h(x) = ae^{2x} + b\cos(2x) + c\sin(2x)$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

**SCHRITT 2:** In einem zweiten Schritt bestimmt man irgendeine beliebige (partikuläre) Lösung der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung durch einen Ansatz nach Art der rechten Seite.

**Partikuläre Lösung durch Ansatz nach Art der rechten Seite**
Aufgrund des Superpositionsprinzips bekommt man eine partikuläre Lösung $f_p$ von $y^{(3)} - 2y^{(2)} + 4y' - 8y = x^2 + 1 + 2e^{2x}$, indem man eine partikuläre Lösung $f_{p_1}$ von $y^{(3)} - 2y^{(2)} + 4y' - 8y = x^2 + 1$ und eine partikuläre Lösung $f_{p_2}$ von $y^{(3)} - 2y^{(2)} + 4y' - 8y = 2e^{2x}$ bestimmt und diese beiden addiert: $f_p = f_{p_1} + f_{p_2}$.

- Zunächst zu $y^{(3)} - 2y^{(2)} + 4y' - 8y = x^2 + 1$:
  Weil 0 keine Nullstelle von $P$ ist (keine Resonanz), machen wir den Ansatz

  $$f_{p_1}(x) = s_1x^2 + s_2x + s_3.$$

  Dreimaliges Ableiten ergibt

  $$\begin{aligned} f'_{p_1}(x) &= 2s_1x + s_2, \\ f^{(2)}_{p_1}(x) &= 2s_1, \\ f^{(3)}_{p_1}(x) &= 0. \end{aligned}$$

  Setzt man diese Ableitungen in die Differentialgleichung ein, so erhält man

  $$-8s_1x^2 + (8s_1 - 8s_2)x + (-4s_1 + 4s_2 - 8s_3) = x^2 + 1.$$

Damit ist $s_1 = s_2 = s_3 = -1/8$. Also

$$f_{p_1}(x) = -\frac{1}{8}\big(x^2 + x + 1\big).$$

- Jetzt zu $y^{(3)} - 2y^{(2)} + 4y' - 8y = 2e^{2x}$:
  Weil 2 eine einfache Nullstelle von $P$ ist (Resonanz), machen wir den Ansatz

  $$f_{p_2}(x) = \alpha x e^{2x}.$$

  Dreimaliges Ableiten ergibt

  $$\begin{aligned} f'_{p_2}(x) &= \alpha e^{2x} + 2\alpha x e^{2x}, \\ f^{(2)}_{p_2}(x) &= 4\alpha e^{2x} + 4\alpha x e^{2x}, \\ f^{(3)}_{p_2}(x) &= 12\alpha e^{2x} + 8\alpha x e^{2x}. \end{aligned}$$

  Setzt man diese Ableitungen in die Differentialgleichung ein, so erhält man

  $$8\alpha e^{2x} = 2e^{2x}.$$

  Damit ist $\alpha = 1/4$. Also

  $$f_{p_2}(x) = \frac{1}{4} x e^{2x}.$$

Insgesamt erhalten wir $f_p(x) = f_{p_1}(x) + f_{p_2}(x) = -\frac{1}{8}\big(x^2 + x + 1\big) + \frac{1}{4} x e^{2x}$.

**SCHRITT 3:** In einem dritten und letzten Schritt muss man schließlich noch die oben bestimmte allgemeine homogene Lösung und die oben bestimmte partikuläre Lösung addieren:

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = ae^{2x} + b\cos(2x) + c\sin(2x) - \frac{1}{8}\big(x^2 + x + 1\big) + \frac{1}{4} x e^{2x}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

**Aufgabe 3** (*10 Punkte*) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2x} \\ -\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}.$$

---

Seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h(x) := \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2x} \\ -\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von $A$ ist gegeben durch

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 5\lambda + 6\,.$$

Die Nullstellen dieses Polynoms und damit die Eigenwerte von $A$ sind folglich

$$\lambda_{1/2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{5^2}{4} - 6} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25-24}{4}} = \frac{5 \pm 1}{2}\,,$$

d. h. es gilt

$$\lambda_1 = 2\,, \quad \lambda_2 = 3\,.$$

Um einen Eigenvektor zum Eigenwert 2 zu finden, müssen wir folgendes Gleichungssystem lösen:

$$\det(A - \lambda_1 E)v_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 0\,,$$

also $x_1 + 2y_1 = 0$. Dies ist beispielsweise durch

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

erfüllt. Für den Eigenwert 3 gilt analog

$$\det(A - \lambda_2 E)v_2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0\,,$$

also $x_2 + y_2 = 0$. Dies ist beispielsweise durch

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

erfüllt. Damit ergibt sich die allgemeine homogene Lösung als

$$y_{\mathrm{h}}(x) = c_1\,\mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Die Wronski-Matrix ist somit gegeben durch

$$W(x) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{2x} & \mathrm{e}^{3x} \\ -\mathrm{e}^{2x} & -\mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\det W(x) = -2\mathrm{e}^{5x} + \mathrm{e}^{5x} = -\mathrm{e}^{5x}$$

und folglich

$$W(x)^{-1} = -\mathrm{e}^{-5x} \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{3x} & -\mathrm{e}^{3x} \\ \mathrm{e}^{2x} & 2\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2x} & \mathrm{e}^{-2x} \\ -\mathrm{e}^{-3x} & -2\mathrm{e}^{-3x} \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man

$$c'(x) = W(x)^{-1} h(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2x} & \mathrm{e}^{-2x} \\ -\mathrm{e}^{-3x} & -2\mathrm{e}^{-3x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2x} \\ -\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix}.$$

Also kann man beispielsweise

$$c(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix}$$

wählen und erhält als eine partikuläre Lösung

$$y_{\mathrm{p}}(x) = W(x)c(x) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{2x} & \mathrm{e}^{3x} \\ -\mathrm{e}^{2x} & -\mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{2x} \\ \mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}.$$

Zusammen ergibt sich die allgemeine inhomogene Lösung zu

$$y(x) = y_{\mathrm{h}}(x) + y_{\mathrm{p}}(x) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{2x} \\ -\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3x} \\ -\mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{2x} \\ \mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

**Aufgabe 4** (*11 Punkte*) Gegeben ist die $2\pi$-periodische Funktion $f$ mit

$$f(x) = \begin{cases} -2, & x \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}) \\ -1, & x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \\ 1, & x \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ 2, & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \\ 0, & x \in \{-\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad f(x+2\pi) = f(x).$$

**(a)** (*2 Punkte*) Skizzieren Sie $f$ auf dem Intervall $(-2\pi, 2\pi)$.

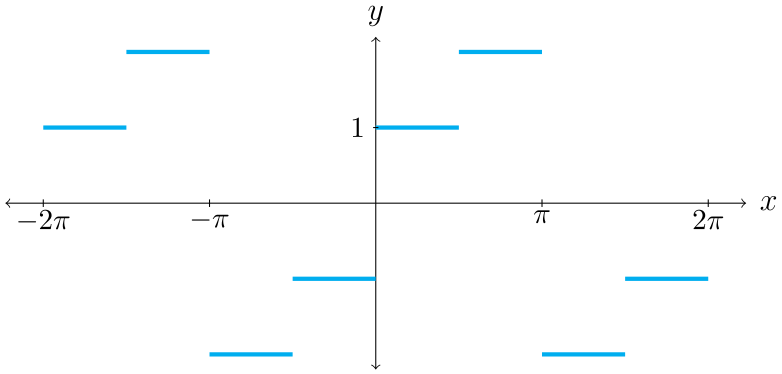
**(b)** (*6 Punkte*) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von $f$.

*Hinweis: Terme der Form* $\cos(n\frac{\pi}{2})$ *und* $\sin(n\frac{\pi}{2})$ *müssen ausgerechnet werden.*

**(c)** (*3 Punkte*) Bestimmen Sie für alle $x \in [-\pi, \pi]$ den Grenzwert der Fourierreihe.

---

**(a)** Skizze:




**(b)** (1) Weil $f(x)$ ungerade ist, gilt $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(2) Die Koeffizienten $b_n$ für $f$ folgen durch Integration:

$$\begin{aligned} b_n =& \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \\ =& \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(nx)dx + \frac{4}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(nx)dx \\ =& \frac{2}{n\pi}[-\cos(nx)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{4}{n\pi}[-\cos(nx)]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ =& \frac{2}{n\pi}(1 - \cos(\frac{n\pi}{2})) + \frac{4}{n\pi}(\cos(\frac{n\pi}{2}) - \cos(n\pi)) \\ =& \frac{2}{n\pi}(1 + \cos(\frac{n\pi}{2}) - 2(-1)^n) \\ =& \begin{cases} \frac{2}{n\pi}(-1 + (-1)^k), & n = 2k \\ \frac{6}{n\pi}, & n = 2k-1 \end{cases}. \end{aligned}$$

(3) Die Fourierreihe von $f$ ist

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2}{2k\pi}(-1+(-1)^k)\sin(2kx) + \frac{6}{(2k-1)\pi}\sin((2k-1)x) \right).$$

Eine weitere Fallunterscheidung nach $k$ gerade/ungerade ist möglich. Es folgt die Fourierreihe

$$f(x) \sim \sum_{l=1}^{\infty} \left( -\frac{4}{(4l+2)\pi}\sin((4l+2)x) + \frac{6}{\pi}\left( \frac{\sin((4l+1)x)}{4l+1} + \frac{\sin((4l+3)x)}{4l+3} \right) \right).$$

**(c)** Die Funktion $f$ ist stetig differenzierbar in den Intervallen $\big((n-1)\frac{\pi}{2}, n\frac{\pi}{2}\big)$ $(n \in \mathbb{Z})$ mit endlichen links- bzw. rechtseitigen Grenzwerten sowohl für $f$ als auch $f'$ in allen Punkten $\big\{n\frac{\pi}{2} \,|\, n \in \mathbb{Z}\big\}$. Da die Funktion $f$ insbesondere stetig ist in $\big((n-1)\frac{\pi}{2}, n\frac{\pi}{2}\big)$ $(n \in \mathbb{Z})$, konvergiert die Fourierreihe in diesem Bereich also gegen $f(x)$.

In den Punkten $x_0 \in \{-\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$ hingegen macht $f$ einen Sprung der Höhe $1, 2$ oder $4$, sodass sich der Grenzwert dort berechnet als

$$\frac{1}{2}\left( \lim_{x \to x_0+0} f(x) + \lim_{x \to x_0-0} f(x) \right) = \begin{cases} 0, & x_0 = -\pi \\ -\frac{3}{2}, & x_0 = -\frac{\pi}{2} \\ 0, & x_0 = 0 \\ \frac{3}{2}, & x_0 = \frac{\pi}{2} \\ 0, & x_0 = \pi \end{cases}.$$