

Modulprüfung HM III (Elektrotechnik)

Termin: 28.02.18

Hinweise:

Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf einem separaten Blatt.

Alle nicht in der Vorlesung behandelten Sachverhalte sind zu beweisen, Lösungsschritte entsprechend zu begründen.

Aussagen und Sätze aus der Vorlesung dürfen ohne Beweis verwendet werden, sofern der Beweis nicht Gegenstand der Aufgabe ist. Alle verwendeten Aussagen und Sätze sind dabei zu kennzeichnen.

Am Ende der Klausur alle Lösungsblätter in das Umschlagblatt einlegen.

Hilfsmittel:

keine

Bearbeitungszeit:

120 min

Name:

Matrikel-Nr.:

Punkte:

A1

A2

A3

A4

A5

Σ

Aufgabe 1. [10]

Gegeben seien die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := e^x - 5 \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) := -4e^{-x},$$

deren Graphen durch folgendes Schaubild gegeben sind. Die von den beiden Graphen eingeschlossene Fläche werde mit M bezeichnet.

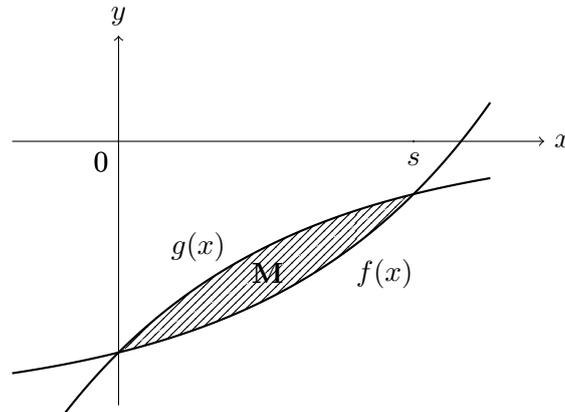


Abbildung 1: Graphen von f und g

- (a) Bestimmen Sie einen Punkt $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $f(s) = g(s)$.
- (b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche M .
- (c) Bezeichne Γ den Weg, der in $(0, g(0))$ startet und entlang des Graphen von g bis zum Punkt $(s, g(s))$ läuft. Finden Sie eine Parametrisierung $\gamma : [0, s] \rightarrow \mathbb{R}^2$ von Γ und berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\gamma} F \cdot d\vec{s}$$

mit

$$F : \mathbb{R} \times (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}^2, F(x, y) := \begin{pmatrix} \ln\left(-\frac{4}{y}\right) - x \\ \frac{x}{y} \end{pmatrix}.$$

- (d) Sei

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{-1, -4\} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x, y) := \frac{ye^{x+y}}{y^2 + 5y + 4}.$$

Berechnen Sie das Flächenintegral

$$\iint_M \varphi \, dA.$$

Hinweis: Die Integrationsreihenfolge darf ohne Begründung vertauscht werden.

Aufgabe 2. [13]

Sei $h \in (0, \pi)$ und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine 2π -periodische Funktion mit

$$f(x) := \begin{cases} h, & \text{falls } 0 \leq x < h, \\ -h, & \text{falls } 2\pi - h < x < 2\pi, \\ 0, & \text{falls } h \leq x \leq 2\pi - h. \end{cases}$$

- (a) Skizzieren Sie die Funktion f in dem Intervall $[0, 4\pi]$ für $h = \frac{\pi}{2}$.
(b) Berechnen Sie die reellen Fourierkoeffizienten a_n und b_n in Abhängigkeit von h . Zeigen Sie, dass die Koeffizienten b_n für den Spezialfall $h = \frac{\pi}{2}$ durch

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{falls } n = 1, 3, 5, \dots, \\ \frac{2}{n}, & \text{falls } n = 2, 6, 10, \dots, \\ 0, & \text{falls } n = 4, 8, 12, \dots, \end{cases}$$

gegeben sind.

- (c) Geben Sie die Grenzfunktion in Abhängigkeit von h an, gegen welche die Fourierreihe von f überall punktweise konvergiert. Begründen Sie dabei ausführlich.
(d) Nutzen Sie den Satz von Parseval, um den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

zu berechnen.

Aufgabe 3. [10]

Gegeben sei die Differenzialgleichung

$$y'''(x) - 5y''(x) + 8y'(x) - 4y(x) = g(x), \tag{1}$$

mit einer Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sowie die beiden Funktionen

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) := e^x, \quad f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) := \frac{1}{f_1(2x)}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Funktion f_1 die Differenzialgleichung (1) für $g \equiv 0$ löst.
(b) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem von (1) mit $g \equiv 0$.
(c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (1) mit

$$\text{(i)} \quad g(x) = f_1(x), \quad \text{(ii)} \quad g(x) = f_2(x), \quad \text{(iii)} \quad g(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

Aufgabe 4. [14]

Gegeben sei der Körper K , der von den beiden Flächen

$$F_1 := \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\} \quad \text{und} \quad F_2 := \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2\},$$

sowie der xy -Ebene eingeschlossen wird.

- (a) Nutzen Sie Zylinderkoordinaten, um das Volumen von K zu berechnen.
- (b) Berechnen Sie die y -Koordinate des geometrischen Schwerpunktes von K .
- (c) Gegeben sei das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) := (xy + yz^2, xz + 2xy^2z, 2z - 2xyz^2)^\top$$

und bezeichne ∂K die Randfläche von K . Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß den Fluss von F durch ∂K von innen nach außen.

- (d) Sei S die Oberfläche der Einheitskugel und $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweifach differenzierbare skalarwertige Funktion mit $\varphi(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}^3$.

- (i) Zeigen Sie die folgende Gleichung

$$|\nabla\varphi|^2 = \operatorname{div}(\varphi\nabla\varphi) - \operatorname{div}(\nabla\varphi)\varphi.$$

- (ii) Gelte nun

$$|\nabla\varphi|^2 = \frac{1}{4}\varphi \quad \text{und} \quad \operatorname{div}(\varphi\nabla\varphi) = \varphi.$$

Berechnen Sie das folgende Oberflächenintegral

$$\iint_S \nabla\varphi \cdot d\vec{O}.$$

Hinweis: Das Volumen der Einheitskugel ist $\frac{4\pi}{3}$.

Aufgabe 5. [13]

- (a) Gegeben seien die Funktionen

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(x) := 1, \quad f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_2(x) := \cos^2(x), \quad f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_3(x) := \sin^2(x).$$

Berechnen Sie Laplacetransformierte

$$\text{(i) } \mathcal{L}[f_1], \quad \text{(ii) } \mathcal{L}[f_2], \quad \text{(iii) } \mathcal{L}[f_3].$$

Hinweis: Sie dürfen $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$ ohne Beweis verwenden.

- (b) Sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion von exponentieller Ordnung und

$$g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := xf(x).$$

Zeigen Sie, dass die Funktion g auch von exponentieller Ordnung ist und dass

$$\mathcal{L}[g](z) = -\frac{d}{dz}\mathcal{L}[f](z).$$

- (c) Sei $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Differenzialgleichung

$$xh''(x) + h'(x) + xh(x) = 0.$$

Nutzen Sie Aufgabenteil (b), um $\mathcal{L}[h]$ mit $\mathcal{L}[h](1) = 1$ zu bestimmen.