Modulprüfung HM III (kyb, mech, phys)

Termin:	*28.02.18*
Hinweise:	*Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf einem separaten Blatt.* *Alle nicht in der Vorlesung behandelten Sachverhalte sind zu beweisen, Lösungsschritte entsprechend zu begründen.* *Aussagen und Sätze aus der Vorlesung dürfen ohne Beweis verwendet werden, sofern der Beweis nicht Gegenstand der Aufgabe ist. Alle verwendeten Aussagen und Sätze sind dabei zu kennzeichnen.* *Am Ende der Klausur alle Lösungsblätter in das Umschlagblatt einlegen.*
Hilfsmittel:	**keine**
Bearbeitungszeit:	*180 min*

Name:	**Matrikel-Nr.:**

Punkte:

A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**	Σ

simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de

Aufgabe 1. [10]

Gegeben seien die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := e^x - 5 \qquad \text{und} \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) := -4e^{-x},$$

deren Graphen durch folgendes Schaubild gegeben sind. Die von den beiden Graphen eingeschlossene Fläche werde mit M bezeichnet.

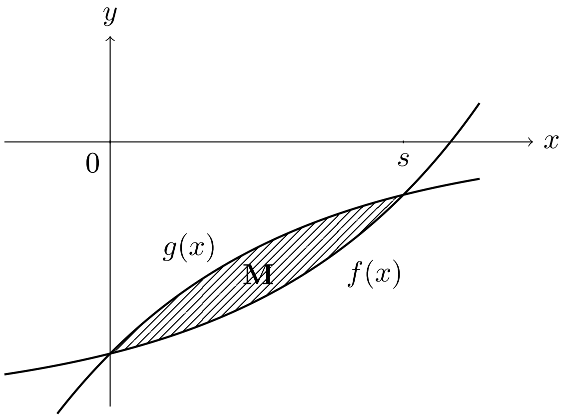

Abbildung 1: Graphen von f und g

(a) Bestimmen Sie einen Punkt $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit $f(s) = g(s)$.

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche M.

(c) Bezeichne Γ den Weg, der in $(0, g(0))$ startet und entlang des Graphen von g bis zum Punkt $(s, g(s))$ läuft. Finden Sie eine Parametrisierung $\gamma : [0, s] \to \mathbb{R}^2$ von Γ und berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_\gamma F \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

mit

$$F : \mathbb{R} \times (-\infty, 0) \to \mathbb{R}^2,\ F(x, y) := \begin{pmatrix} \ln\left(-\frac{4}{y}\right) - x \\ \frac{x}{y} \end{pmatrix}.$$

(d) Sei

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}\backslash\{-1, -4\} \to \mathbb{R},\ \varphi(x, y) := \frac{ye^{x+y}}{y^2 + 5y + 4}.$$

Berechnen Sie das Flächenintegral

$$\iint_{\mathrm{M}} \varphi \,\mathrm{d}A.$$

Hinweis: Die Integrationsreihenfolge darf ohne Begründung vertauscht werden.

Aufgabe 2. [13]

Sei $h \in (0, \pi)$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine $2\pi-$periodische Funktion mit

$$f(x) := \begin{cases} h, & \text{falls } 0 \leq x < h, \\ -h, & \text{falls } 2\pi - h < x < 2\pi, \\ 0, & \text{falls } h \leq x \leq 2\pi - h. \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie die Funktion f in dem Intervall $[0, 4\pi]$ für $h = \frac{\pi}{2}$.

(b) Berechnen Sie die reellen Fourierkoeffizienten a_n und b_n in Abhängigkeit von h. Zeigen Sie, dass die Koeffizienten b_n für den Spezialfall $h = \frac{\pi}{2}$ durch

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{falls } n = 1, 3, 5, ..., \\ \frac{2}{n}, & \text{falls } n = 2, 6, 10, ..., \\ 0, & \text{falls } n = 4, 8, 12, ..., \end{cases}$$

gegeben sind.

(c) Geben Sie die Grenzfunktion in Abhängigkeit von h an, gegen welche die Fourierreihe von f überall punktweise konvergiert. Begründen Sie dabei ausführlich.

(d) Nutzen Sie den Satz von Parseval, um den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

zu berechnen.

Aufgabe 3. [10]

Gegeben sei die Differenzialgleichung

$$y'''(x) - 5y''(x) + 8y'(x) - 4y(x) = g(x), \tag{1}$$

mit einer Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sowie die beiden Funktionen

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) := \mathrm{e}^x, \qquad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_2(x) := \frac{1}{f_1(2x)}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f_1 die Differenzialgleichung (1) für $g \equiv 0$ löst.

(b) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem von (1) mit $g \equiv 0$.

(c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (1) mit

(i) $g(x) = f_1(x)$, **(ii)** $g(x) = f_2(x)$, **(iii)** $g(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

Aufgabe 4. [14]

Gegeben sei der Körper K, der von den beiden Flächen

$$F_1 := \{(x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2=1\} \qquad \text{und} \qquad F_2 := \{(x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3 : \; z = 1-x^2\},$$

sowie der $xy-$Ebene eingeschlossen wird.

(a) Nutzen Sie Zylinderkoordinaten, um das Volumen von K zu berechnen.

(b) Berechnen Sie die $y-$Koordinate des geometrischen Schwerpunktes von K.

(c) Gegeben sei das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \; F(x,y,z) := (xy + yz^2, xz + 2xy^2z, 2z - 2xyz^2)^\top$$

und bezeichne ∂K die Randfläche von K. Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß den Fluss von F durch ∂K von innen nach außen.

(d) Sei S die Oberfläche der Einheitskugel und $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine zweifach differenzierbare skalarwertige Funktion mit $\varphi(x) \neq 0, \; x \in \mathbb{R}^3$.

(i) Zeigen Sie die folgende Gleichung

$$|\nabla\varphi|^2 = \operatorname{div}(\varphi\nabla\varphi) - \operatorname{div}(\nabla\varphi)\,\varphi.$$

(ii) Gelte nun

$$|\nabla\varphi|^2 = \frac{1}{4}\varphi \qquad \text{und} \qquad \operatorname{div}(\varphi\nabla\varphi) = \varphi.$$

Berechnen Sie das folgende Oberflächenintegral

$$\iint_S \nabla\varphi \cdot \mathrm{d}\vec{O}.$$

Hinweis: Das Volumen der Einheitskugel ist $\frac{4\pi}{3}$.

Aufgabe 5. [13]

(a) Gegeben seien die Funktionen

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f_1(x) := 1, \qquad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f_2(x) := \cos^2(x), \qquad f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f_3(x) := \sin^2(x).$$

Berechnen Sie die Laplacetransformierte

(i) $\mathcal{L}[f_1]$, **(ii)** $\mathcal{L}[f_2]$, **(iii)** $\mathcal{L}[f_3]$.

Hinweis: Sie dürfen $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$ ohne Beweis verwenden.

(b) Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion von exponentieller Ordnung und

$$g : [0,\infty) \to \mathbb{R}, \; g(x) := xf(x).$$

Zeigen Sie, dass die Funktion g auch von exponentieller Ordnung ist und dass

$$\mathcal{L}[g](z) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathcal{L}[f](z).$$

(c) Sei $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differenzialgleichung

$$xh''(x) + h'(x) + xh(x) = 0.$$

Nutzen Sie Aufgabenteil **(b)**, um $\mathcal{L}[h]$ mit $\mathcal{L}[h](1) = 1$ zu bestimmen.

Aufgabe 6. [16]

(a) Gegeben sei die Funktion

$$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ u(x,y) := x^2 + 2x - y^2 + 1.$$

Bestimmen Sie eine Funktion $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \tilde{f}(x,y) := \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

mit einer holomorphen Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ identifiziert werden kann.

(b) Bestimmen Sie die Lage der Singularitäten und berechnen Sie die Residuen folgender Funktionen

(i) $f_1(z) := \dfrac{\cos(z)}{1+z^2}$, **(ii)** $f_2(z) := \dfrac{e^{z(1-z)}-1}{\sin(\pi z)} + \dfrac{1}{z}$, **(iii)** $f_3(z) := \dfrac{1}{(z+1)^2+1}$.

(c) Berechnen Sie das folgende Kurvenintegral

$$\int_{|z-i-1|=\frac{7}{5}} \frac{e^{z(1-z)}-1}{\sin(\pi z)} + \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z.$$

(d) Nutzen Sie den Residuensatz, um das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^2+1}\,\mathrm{d}x$$

zu bestimmen.

(e) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $z_0 \in \Omega$ und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zeigen Sie, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{ix})\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 7. [14]

(a) Entscheiden Sie, von welchem Typ die folgenden partiellen Differenzialgleichungen sind.

(i) $u_{xx} = 0$, **(ii)** $u_t = c^2 u_{xx}$, **(iii)** $u_{tt} = c^2 u_{xx},\ t, x \in \mathbb{R}$,

wobei $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine feste Konstante ist.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Separationsansatzes eine Lösung des folgenden Randanfangswertproblems

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) = 2u_{xx}(t,x), & t \in (0,\infty),\ x \in (0,\pi), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & t \in (0,\infty), \\ u_t(0,x) = 28\sin(2x) + \sin(2018x), & x \in (0,\pi). \end{cases}$$

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Charakteristikenmethode eine Lösung des folgenden Randwertproblems

$$\begin{cases} 4x^3 u_t - t u_x = 0, & t, x \in (0,\infty), \\ u(t,0) = t, & t \in (0,\infty). \end{cases}$$

simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de