Klausur zur Höheren Mathematik 1/2

für **Ingenieurstudiengänge**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 8** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 9 – 11** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\sinh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos(x)$	$\frac{1}{\left(\cos(x)\right)^2}$	$\cosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos(x)$	$\arctan(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 15.10.2018 über das C@MPUS–Portal (`https://campus.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **22.10.2018** bis **24.10.2018** einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte und Funktionengrenzwerte.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{14n^3-19}{2(n+1)(5n-4)^2}$ **(b)** $\lim\limits_{n\to\infty} (n-\sqrt{n^2+2n})$ **(c)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\ln(x+1))}{\sinh(2x)}$

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \frac{k-1}{(k+1)!} = 1 - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Aufgabe 3 (*6 Punkte*) Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n/2}}{\ln(n+1)} (z-2+\mathrm{i})^n.$$

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ sowie den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ der Reihe.

(b) Untersuchen Sie die Reihe auf Konvergenz für die folgenden Werte von $z \in \mathbb{C}$:

(i) $2-\frac{5}{4}\mathrm{i}$ (ii) $4-3\mathrm{i}$ (iii) $2-\frac{1}{\sqrt{5}}-\mathrm{i}$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ **(b)** $\displaystyle\int 6x^3 \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 5 (*9 Punkte*) Gegeben sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \dfrac{\mathrm{e}^{x-3y}}{y}$.

(a) Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen von f bis zur zweiten Ordnung.

(b) Geben Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f zum Entwicklungspunkt $(0,1)$ an.

(c) Besitzt f im Punkt $(0,1)$ ein lokales Minimum?

Aufgabe 6 (*3 Punkte*) Es bezeichne $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{C}$ den komplexen Vektorraum der komplexen Polynome vom Grad höchstens zwei. Gegeben sei die lineare Abbildung $f\colon \operatorname{Pol}_2 \mathbb{C} \to \operatorname{Pol}_2 \mathbb{C}\colon p(z) \mapsto p(z - \mathrm{i})$, sowie die Basis $Q\colon q_1, q_2, q_3$ von $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{C}$ mit $q_1(z) = 1$, $q_2(z) = z$ und $q_3(z) = z^2$.

(a) Bestimmen Sie die inverse Abbildung $f^{-1}\colon \operatorname{Pol}_2 \mathbb{C} \to \operatorname{Pol}_2 \mathbb{C}$ zu f.

(b) Berechnen Sie die Matrizen ${}_Q f_Q$ und ${}_Q(f^{-1})_Q$.

Aufgabe 7 (*6 Punkte*) Die Ellipse $\mathcal{Q}$ sei bestimmt durch die Gleichung

$$13x_1^2 + 13x_2^2 - 10x_1x_2 = 144.$$

(a) Geben Sie eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, einen Vektor $b \in \mathbb{R}^2$ und einen Skalar $c \in \mathbb{R}$ so an, dass gilt

$$\mathcal{Q} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\intercal A\ x + 2b^\intercal x + c = 0\}.$$

(b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von $\mathcal{Q}$.

(c) Bestimmen Sie die Halbachsenlängen von $\mathcal{Q}$.

(d) Skizzieren Sie die Ellipse $\mathcal{Q}$ im Standardkoordinatensystem.

Aufgabe 8 (*5 Punkte*) Gegeben ist das reelle lineare Gleichungssystem $A_\alpha x = b$ mit

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha+1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) Geben Sie die Spur der Matrix A_α in Abhängigkeit von α an.

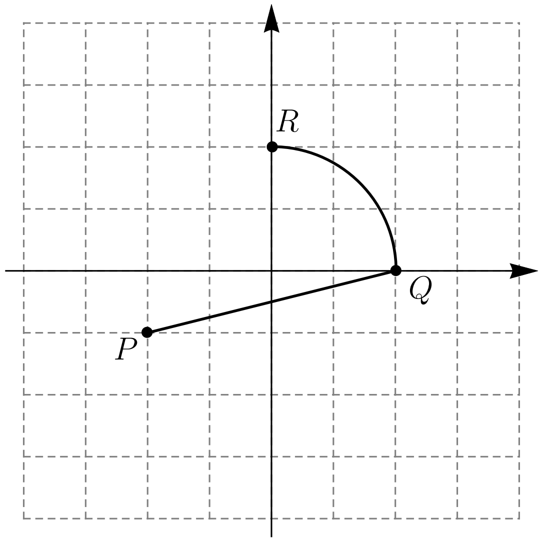
(b) Geben Sie den Rang der Matrix A_α in Abhängigkeit von α an.

(c) Für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das obige Gleichungssystem keine Lösung?

(d) Für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem eine Lösung der Form $x = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ \mu \end{pmatrix}$ für ein $\mu \in \mathbb{R}$?

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studien-gang:**

Aufgabe 9 (*8 Punkte*) Es sei K die Kurve, die aus der Strecke von $P = (-2, -1)$ nach $Q = (2, 0)$ und der Viertelkreislinie von Q nach $R = (0, 2)$ besteht. Weiter sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$.



(a) Geben Sie eine Parametrisierung C_1 der Strecke von P nach Q sowie eine Parametrisierung C_2 der Viertelkreislinie von Q nach R an.

$C_1 : \square \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \square$, $\quad C_2 : \square \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \square$.

(b) Geben Sie $C_1'(t)$ und $C_2'(t)$ an. $\quad C_1'(t) = \square$, $\quad C_2'(t) = \square$.

(c) Bestimmen Sie $\displaystyle\int_K f(s)\,\mathrm{d}s = \square$

(d) Bestimmen Sie ein Potential von ∇f. $\square$

(e) Bestimmen Sie $\displaystyle\int_K \nabla f(x) \bullet \mathrm{d}x = \square$.

Aufgabe 10 (*5 Punkte*) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A und geben Sie jeweils zugehörige Eigenvektoren an.

(b) Geben Sie Matrizen $T, D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ so an, dass D Diagonalgestalt besitzt und $TDT^{-1} = A$ gilt.

$T =$ $D =$

Aufgabe 11 (*8 Punkte*) Für $\alpha, z \in \mathbb{C}$ sei $A_{\alpha,z} = \begin{pmatrix} \alpha & z & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

(a) Entscheiden Sie, für welche Paare $(\alpha, z) \in \mathbb{C}^2$ die Matrix $A_{\alpha,z}^{\intercal} A_{\alpha,z}$ diagonal ist.

(b) Berechnen Sie $\det(A_{\alpha,z})$.

(c) Bestimmen Sie für $z = -1 + \mathrm{i}$ den Betrag $|z|$ sowie das Argument $\varphi \in [0, 2\pi)$ von z.

(d) Für welche $\alpha \in \mathbb{C}$ ist $A_{\alpha,1-\mathrm{i}}$ singulär? Geben Sie die Lösungen in Polarkoordinaten an.

(e) Skizzieren Sie die Menge $M = \{\alpha \in \mathbb{C} : \det(A_{\alpha,0}) \in \mathbb{R}_0^+\} \cap \{\alpha \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(\alpha) \leqq 0\}$.