Prof. Dr. Guido Schneider
Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Klausur

für Studierende der Fachrichtungen
el, kyb, mecha, phys, tpel

Bitte unbedingt beachten:

- Bitte beschriften Sie jeden Ihrer Zettel mit Namen und Matrikelnummer.
- Legen Sie Ihren Studentenausweis gut sichtbar vor sich auf den Tisch.
- Verwenden Sie **keinen Bleistift oder Rotstift.**
- **Taschenrechner, Mobiltelefone etc. sind nicht zugelassen.**
- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **180 Minuten**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** Keine, insbesondere keine Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengeräte.
- Bei den **Aufgaben 2, 5, 6, 8, 9, 10d, 11, 12** sind die vollständigen Argumentationsschritte anzugeben. Bei den **Aufgaben 1, 3, 4, 7, 10abc** wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt, Nebenrechnungen werden hier nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- In dieser Klausur können bis zu **60 Punkte** erreicht werden.
- Nach der Klausur legen Sie bitte Ihre beschriebenen Blätter in den gefalteten Umschlagbogen hinein.
- Wann die Prüfungsergebnisse vorliegen, wird auf der Homepage der Vorlesung bekanntgegeben. Mit 24 und mehr Punkten ist die Klausur auf jeden Fall bestanden.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1+1+2 Punkte*) Seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$8z^3 = 27,$$

wobei z_1 diejenige Lösung ist, für die $\arg(z_1) \in (0, \pi)$ ist.

a) Bestimmen Sie das Argument von z_1:

$$\arg(z_1) = \boxed{\tfrac{2\pi}{3}}$$

b) Bestimmen Sie den Betrag von z_1:

$$|z_1| = \boxed{\tfrac{3}{2}}$$

c) Stellen Sie z_1 in kartesischen Koordinaten dar:

$$z_1 = \boxed{-\tfrac{3}{4}} + \boxed{\tfrac{3\sqrt{3}}{4}}\ i$$

Aufgabe 2 (*2+2 Punkte*) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''' + 3y'' + 2y' = 0.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung.

b) Bestimmen Sie eine Lösung $y(t)$ der Differentialgleichung mit $y'(0) = 1$, $y(0) = 0$ und $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$.

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Lösung:

a)
- Das charakteristische Polynom $p(r) = r^3 + 3r^2 + 2r$ besitzt die Nullstellen $r = 0$, $r = -1$ und $r = -2$.
- Damit is die allgemeine reelle Lösung $y(t) = c_1 + c_2e^{-t} + c_3e^{-2t}$ mit $c_{1,2,3} \in \mathbb{R}$.

b) Sei $y(t) = c_1 + c_2e^{-t} + c_3e^{-2t}$ mit $c_{1,2,3} \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung mit Nebenbedingungen $y'(0) = 1$, $y(0) = 0$ und $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$.
- Die Nebenbedingungen ergeben ein LGS für c_1, c_2, c_3 gegeben durch $c_1+c_2+c_3 = y(0) = 0$, $-c_2 - 2c_3 = y'(0) = 1$ und $c_1 = \lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.
- Lösen des LGS liefert $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ und $c_3 = -1$. Damit ist $y(t) = e^{-t} - e^{-2t}$ die gefragte Lösung.

Aufgabe 3 (*1+1+1 Punkte*) Gegeben sei die reelle Matrix:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 3 \\ 0 & 3\alpha - 2 & 0 \\ \alpha & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix A_α in Abhängigkeit von α:

$\det(A_\alpha) =$ $\boxed{-(3\alpha-2)^2 \text{ or } -4+12\alpha-9\alpha^2}$

b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist A_α invertierbar?

$\alpha \in$ $\boxed{\mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}}$

c) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\text{Rang}(A_\alpha) = 1$?

$\alpha \in$ $\boxed{\emptyset}$

Aufgabe 4 (*1+3+2 Punkte*) Gegeben sei die reelle Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ von A an:

$\chi_A(\lambda) =$ $\boxed{(3-\lambda)(\lambda-4)\lambda \text{ or } -12\lambda+7\lambda^2-\lambda^3}$

b) Geben Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der Matrix A und jeweils einen zugehörigen Eigenvektor v_1, v_2, v_3 an, so dass $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ ist:

$\lambda_1 = \boxed{0}$ $\lambda_2 = \boxed{3}$ $\lambda_3 = \boxed{4}$

$$v_1 = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad v_2 = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad v_3 = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

c) Sei $b = (3, 4, 4)^\top$. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des LGS $Ax = b$:

$$x = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} + \mu \cdot \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \qquad \mu \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 5 (*2+2+2 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{a)} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot e^{x^2} \qquad \text{b)} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{1-\cos(x)} \qquad \text{c)} \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sqrt{\cos(3t)}dt}{\sin(x)}$$

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Lösung: Wir berechnen mithilfe der Regel von l'Hospital und des Fundamentalsatzes der Integralrechnung:

$$\begin{aligned}
&\text{a)} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot e^{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x\to 0} e^{x^2} = \lim_{x\to 0} \cos(x) \cdot \lim_{x\to 0} e^{x^2} = 1 \\
&\text{b)} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(x^2)}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)}{\cos(x)} = 2 \\
&\text{c)} \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sqrt{\cos(3t)}dt}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos(3x)}}{\cos(x)} = 1
\end{aligned}$$

Aufgabe 6 (*2+2 Punkte*) Gegeben sei die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2-1}}.$$

a) Entscheiden Sie, ob die Reihe konvergiert, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Lösung: Es gilt

$$0 < \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2-1}} < \frac{1}{\sqrt{n^2-1}},$$

für alle $n \in \mathbb{N}_{\geqq 2}$. Damit ist die Folge $\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}_{\geqq 2}}$ alternierend und die Folge $\left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}_{\geqq 2}}$ monoton fallend. Es gilt außerdem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} = 0.$$

Also konvergiert die Reihe nach dem Leibniz-Kriterium.

b) Ist die Reihe absolut konvergent? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Lösung: Es gilt

$$0 < \sqrt{n^2-1} \leqq \sqrt{n^2} = n \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} \geqq \frac{1}{n},$$

für alle $n \in \mathbb{N}_{\geqq 2}$. Die harmonische Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n},$$

divergiert. Also divergiert

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}},$$

nach dem Minoranten-Kriterium. Damit konvergiert die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2-1}}$ nicht absolut.

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Aufgabe 7 (*1+2 Punkte*) Gegeben sei die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n} n^3 x^n.$$

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe $f(x)$:

$R = \boxed{\frac{1}{4}}$

b) Bestimmen Sie die Funktionswerte:

$f(0) = \boxed{0}$ $\quad f'(0) = \boxed{4}$ $\quad f''(0) = \boxed{256}$

Aufgabe 8 (*3+3+1+2 Punkte*)

a) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin^4(x)\cos(x)$.

Lösung: Sei $u = \sin(x)$. Nach der Substitutionsregel gilt:

$$\int \sin^4(x)\cos(x)dx = \int u^4 du \qquad = \frac{1}{5}u^5 + C \qquad = \frac{1}{5}\sin^5(x) + C,$$

mit $C \in \mathbb{R}$.

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^e x\ln(x)\mathrm{d}x.$$

Lösung: Durch partielle Integration ergibt sich:

$$\int_1^e x\ln(x)dx = \left[\tfrac{1}{2}x^2\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{\frac{1}{2}x^2}{x}dx \qquad = \left[\tfrac{1}{2}x^2\ln(x) - \tfrac{1}{4}x^2\right]_1^e \qquad = \tfrac{1}{4}\left(e^2+1\right)$$

c) Geben Sie die Partialbruchzerlegung des folgenden rationalen Ausdrucks an:

$$\frac{1}{x^2-4x}.$$

Lösung: Es gilt $x^2 - 4x = x(x-4)$. Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung lautet

$$\frac{1}{x^2-4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-4},$$

mit $A, B \in \mathbb{R}$. Daher muss $A(x-4) + Bx = 1$ gelten. Einsetzen von $x = 0$ und $x = 4$ liefert $A = -\frac{1}{4}$ und $B = \frac{1}{4}$. Die gefragte Partialbruchzerlegung ist

$$\frac{1}{x^2-4x} = -\frac{1}{4x} + \frac{1}{4x-16}.$$

d) Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2-4x} \mathrm{d}x.$$

Lösung: Unter verwendung von Teilaufgabe b berechnen wir

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{x^2-4x} \mathrm{d}x &= \int_1^2 \left(\frac{1}{4x-16} - \frac{1}{4x}\right) dx = \left[\frac{1}{4}\left(\ln|x-4| - \ln|x|\right)\right]_1^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(\ln(2) - \ln(3) - \ln(2) + \ln(1)\right) = -\frac{1}{4}\ln(3)\end{aligned}$$

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Aufgabe 9 (*2+2 Punkte*) Gegeben seien das Vektorfeld $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und die Kurve $c \colon [0,2] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x,y,z) = -\begin{pmatrix} e^{-x} \\ e^{-y} \\ e^{z} \end{pmatrix}, \qquad c(t) = \begin{pmatrix} 1+t \\ t \\ -t \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie das Wegintegral zweiter Art

$$\int_c \langle f(X), \mathrm{d}X \rangle.$$

Lösung: Wir berechnen

$$\begin{aligned}\int_c \langle f(X), \mathrm{d}X \rangle &= \int_0^2 \langle f(c(t)), \dot{c}(t) \rangle dt = -\int_0^2 \left\langle \begin{pmatrix} e^{-(1+t)} \\ e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= -\int_0^2 e^{-(1+t)} dt = \left[e^{-(1+t)}\right]_0^2 = e^{-3} - e^{-1}.\end{aligned}$$

Alternativ: Sei das Potential $\Phi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\Phi(x,y,z) = e^{-x} + e^{-y} - e^{z}$. Es gilt $\operatorname{grad}(\Phi) = f$ und somit

$$\int_c \langle f(X), \mathrm{d}X \rangle = \Phi(c(2)) - \Phi(c(0)) = e^{-3} - e^{-1}.$$

b) Begründen Sie wieso $\int_c \langle f(X), \mathrm{d}X \rangle$ wegunabhängig ist.

Lösung: Es gilt $\operatorname{rot}(f) = (0,0,0)^\top$ und somit ist das Integral wegunabhängig. .

Alternativ: Sei $\Phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\Phi(x,y,z) = e^{-x} + e^{-y} - e^{z}$. Es gilt $\operatorname{grad}(\Phi) = f$ und somit ist f ein Gradientenfeld und das Integral wegunabhängig. .

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Aufgabe 10 (*1+2+1+3 Punkte*) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = x^2 + xy - 8y^2 - 2x^5y^3 - 41x^{81}y.$$

a) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von f im Punkt $(0,0)$.

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -16 \end{pmatrix}$$

b) Bestimmen Sie für den stationären Punkt $(0,0)$ von f, ob f dort ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder einen Sattelpunkt besitzt. Geben Sie eine mathematische Begründung für Ihre Entscheidung.

Die Funktion f besitzt ein(en) Sattelpunkt in $(0,0)$.

Mathematische Begründung: Wir berechnen $\det(H_f(0,0)) = -33 < 0$. Nach dem Hurwitz-Kriterium besitzt f einen Sattelpunkt in $(0,0)$.

c) Geben Sie für f das Taylorpolynom der zehnten Stufe um den Entwicklungspunkt $(0,0)$ an.

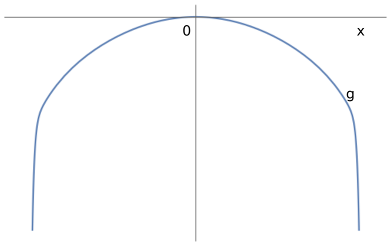
$$T_{10}(f,(x,y),(0,0)) = x^2 + xy - 8y^2 - 2x^5y^3$$

d) Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = f(x,x)$. Bestimmen Sie alle Nullstellen und Extremstellen von g und skizzieren Sie g.

Lösung:

- Es gilt $g(0) = 0$ und $g(x) = -6x^2 - 2x^8 - 41x^{82} < 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Damit ist 0 die einzige Nullstelle von g.
- Wir berechnen $g'(x) = -2x(6 + 8x^6 + 1681x^{80})$. Da gilt $6 + 8x^6 + 1681x^{80} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, folgt $g'(x) > 0$ für $x < 0$ und $g'(x) < 0$ für $x > 0$. Außerdem gilt $g'(0) = 0$. Also, $g(x)$ hat ein Maximum auf $x = 0$ und 0 ist die einzige Extremstelle von g.

– Skizze:



Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Aufgabe 11 (*4 Punkte*) Gegeben seien die Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2, \qquad g(x,y) = 4x^2 + y^2.$$

Bestimmen Sie den maximalen und minimalen Wert der Funktion f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 1$. **Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.**

Lösung:

- Es ist $g'(x,y) = (8x, 2y)$. Also gilt $\mathrm{Rang}(g'(x,y)) \neq 1$ genau dann, wenn $x = y = 0$. Wegen $g(0,0) \neq 1$ ist $\mathrm{Rang}(g'(x,y)) = 1$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $g(x,y) = 1$. Somit können alle Punkte, in denen f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 1$ ein Extremum annimmt, mit Hilfe des Lagrange-Ansatzes ermittelt werden.
- Das bedeutet, die Extremstellen sind unter den Lösungen der Gleichungen

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) + \lambda \nabla g(x,y) &= 0, \\ g(x,y) &= 1. \end{aligned}$$

  Dies ergibt die Bedingungen

$$\begin{aligned} 2x + 8\lambda x &= 0, \qquad (1) \\ 4y + 2\lambda y &= 0, \qquad (2) \\ 4x^2 + y^2 &= 1. \qquad (3) \end{aligned}$$

- Aus (1) folgt $x = 0$ oder $\lambda = -\frac{1}{4}$. Aus (2) folgt $y = 0$ oder $\lambda = -2$. Deswegen muss $x = 0$ oder $y = 0$ gelten. Ist $x = 0$, so folgt aus (3), dass $y = \pm 1$. Ist $y = 0$, so folgt aus (3), dass $x = \pm\frac{1}{2}$. Also, die Extremstellen von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 1$ sind $(0, \pm 1)$ und $(\pm\frac{1}{2}, 0)$.
- Einsetzen der Extremstellen in f ergibt $f(0, \pm 1) = 2$ und $f(\pm\frac{1}{2}, 0) = \frac{1}{4}$. Also, der maximalen und minimalen Wert der Funktion f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 1$ sind jeweils 2 und $\frac{1}{4}$.

Aufgabe 12 (*1+1+1+2+1 Punkte*) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie eine kurze Begründung. Ohne Begründung gibt es für die Angabe "Wahr" oder "Falsch" keine Punkte.

a) Die Menge $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + y^3 = 1\}$ ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$.

b) Jede Stammfunktion einer stetigen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig.

c) Jede streng monotone Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist surjektiv.

d) Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ konvergiert nicht gegen 100 und kann auch nicht so umgeordnet werden, dass sie gegen 100 konvergiert.

e) Die Relation $\sim$ definiert durch

$$x \sim y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \frac{x}{y} \in \mathbb{Z} \text{ oder } \frac{y}{x} \in \mathbb{Z}$$

ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Lösung:

a) Falsch, da $(0,0) \notin M$.

b) Wahr: Nach dem Fundamentalsatzes der Integralrechnung ist jede Stammfunktion einer stetigen Funktion differenzierbar und somit stetig.

c) Falsch: $g(x) = \arctan(x)$ ist streng monoton (da $g'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$) aber nicht surjektiv (denn $g[\mathbb{R}] = (-\pi/2, \pi/2)$).

d) Wahr: Die Standardreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konvergiert absolut (nach dem Integralkriterium). Damit ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ absolut konvergent und der Wert von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ ändert sich nicht, wenn die Reihe umgeordnet wird.

Es gilt
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \leqq 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = 1 + \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^{\infty} = \frac{3}{2} < 100.$$

e) Falsch: Es gilt $6 \sim 2$ und $4 \sim 2$ da $\frac{6}{2} = 3 \in \mathbb{Z}$ und $\frac{4}{2} = 2 \in \mathbb{Z}$, aber $6 \not\sim 4$, denn $\frac{6}{4}, \frac{4}{6} \notin \mathbb{Z}$. Also $\sim$ ist kein Äquivalenzrelation (nicht transitiv).