

Modulprüfung HM III (Elektrotechnik)

Termin: 06.09.2018

Hinweise: Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf einem separaten Blatt.
Alle nicht in der Vorlesung behandelten Sachverhalte sind zu beweisen, Lösungsschritte entsprechend zu begründen.
Aussagen und Sätze aus der Vorlesung dürfen ohne Beweis verwendet werden, sofern der Beweis nicht Gegenstand der Aufgabe ist. Alle verwendeten Aussagen und Sätze sind dabei zu kennzeichnen.
Am Ende der Klausur alle Lösungsblätter in das Umschlagblatt einlegen.

Hilfsmittel: **keine**

Bearbeitungszeit: 120 min

Name:

Matrikel-Nr.:

Punkte:

A1	A2	A3	A4	A5	Σ
----	----	----	----	----	----------

Aufgabe 1. [10]

Gegeben seien

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = (1 + 4x^2 + 4x^4)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, F(x, y, z) = (6z, -y, -x)^\top.$$

(a) Berechnen Sie

$$(i) \int_{\gamma} f \, ds \quad \text{und} \quad (ii) \int_{\gamma} F \cdot d\vec{s}$$

für die Kurve

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \gamma(t) = (t, t^2, \frac{2}{3}t^3)^\top.$$

(b) Sei Γ ein Streckenzug von $(0, 0, 0)$ über $(0, 0, \frac{2}{3})$ zu $(1, 1, \frac{2}{3})$. Geben Sie eine entsprechende Parametrisierung von $\Gamma : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ an und berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\vec{s}.$$

(c) Untersuchen Sie, ob es sich bei F um ein Gradientenfeld handelt. Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Skizzieren Sie den Integrationsbereich von

$$\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} \, dx \, dy$$

und berechnen Sie das Integral.

Aufgabe 2. [13]

Gegeben sei die Funktion

$$\tilde{g} : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{g}(x) = x(\pi - x).$$

(a) Setzen Sie \tilde{g} geeignet zu einer Funktion $g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ so fort, dass sich g als Sinusreihe darstellen lässt.

(b) Zeigen Sie

$$g(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{(2k+1)^3}, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

(c) Verwenden Sie das Ergebnis aus (b), um die Summe

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots$$

zu berechnen.

(d) Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Parseval auch

$$1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \dots$$

Aufgabe 3. [14]

- (a) Berechnen Sie mit Hilfe des Divergenzsatzes den Flächeninhalt der Ellipse

$$E_{a,b} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}, \quad a, b > 0.$$

- (b) Sei nun $G = E_{1,1} \times [0, 3]$. Skizzieren Sie G und berechnen Sie das Volumen sowie die z -Koordinate des geometrischen Schwerpunkts von G .
(c) Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß das Integral

$$\iint_{\partial G} F \cdot d\vec{O}$$

für das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) = (4x, -2y^2, z^2)^\top.$$

- (d) Sei $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein differenzierbares Vektorfeld und $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ein differenzierbares Skalarfeld. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{rot}(\varphi A) = \varphi \cdot \operatorname{rot}(A) + (\nabla \varphi) \times A.$$

Aufgabe 4. [13]

- (a) Für $a > 0$ seien die Funktionen

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-a, a] \\ 0, & x \notin [-a, a] \end{cases} \quad \text{und} \quad f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_2(x) := e^{-a|x|}$$

gegeben. Berechnen Sie die Fouriertransformierte

$$\text{(i) } \hat{f}_1, \quad \text{(ii) } \hat{f}_2.$$

- (b) Nutzen Sie Aufgabenteil (a) und den Satz von Plancherel, um die folgenden Integrale zu berechnen.

$$\text{(i) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(ax)}{x^2} dx, \quad \text{(ii) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx, \quad a > 0.$$

- (c) Zeigen Sie mit Hilfe der Fouriertransformation, dass Lösungen u der Gleichung

$$\frac{n}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-n|t-s|} u(s) ds = f(t), \quad n \in \mathbb{N}, \quad f \in \mathcal{S},$$

von der Form

$$u(t) = -\frac{1}{n^2} f''(t) + f(t)$$

sind.

Aufgabe 5. [10]

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - 9y'(x) + 20y(x) = g(x) \quad (1)$$

mit einer Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sowie die beiden Funktionen

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) := x, \quad f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) := e^{2x}.$$

- (a) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem von (1) mit $g \equiv 0$.
(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (1) mit

$$(i) \quad g(x) = f_1(x), \quad (ii) \quad g(x) = f_2(x), \quad (iii) \quad g(x) = (f_2 \circ f_1)(2x).$$