Modulprüfung HM III (kyb, mech, phys)

Termin:	*06.09.2018*
Hinweise:	*Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf einem separaten Blatt.* *Alle nicht in der Vorlesung behandelten Sachverhalte sind zu beweisen, Lösungsschritte entsprechend zu begründen.* *Aussagen und Sätze aus der Vorlesung dürfen ohne Beweis verwendet werden, sofern der Beweis nicht Gegenstand der Aufgabe ist. Alle verwendeten Aussagen und Sätze sind dabei zu kennzeichnen.* *Am Ende der Klausur alle Lösungsblätter in das Umschlagblatt einlegen.*
Hilfsmittel:	**keine**
Bearbeitungszeit:	*180 min*

Name:	**Matrikel-Nr.:**

Punkte:

A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**	Σ

Aufgabe 1. [10]
Gegeben seien

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) = \left(1 + 4x^2 + 4x^4\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ F(x,y,z) = (6z, -y, -x)^\top.$$

(a) Berechnen Sie

$$\textbf{(i)} \quad \int_\gamma f \,\mathrm{d}s \qquad \text{und} \qquad \textbf{(ii)} \quad \int_\gamma F \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

für die Kurve

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3,\ \gamma(t) = \left(t, t^2, \tfrac{2}{3}t^3\right)^\top.$$

(b) Sei Γ ein Streckenzug von $(0,0,0)$ über $(0,0,\frac{2}{3})$ zu $(1,1,\frac{2}{3})$. Geben Sie eine entsprechende Parametrisierung von $\Gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^3$ an und berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_\Gamma F \cdot \mathrm{d}\vec{s}.$$

(c) Untersuchen Sie, ob es sich bei F um ein Gradientenfeld handelt. Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Skizzieren Sie den Integrationsbereich von

$$\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} \mathrm{e}^{\frac{y}{x}} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

und berechnen Sie das Integral.

Aufgabe 2. [13]
Gegeben sei die Funktion

$$\tilde{g} : [0,\pi] \to \mathbb{R}, \quad \tilde{g}(x) = x(\pi - x).$$

(a) Setzen Sie $\tilde{g}$ geeignet zu einer Funktion $g : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ so fort, dass sich g als Sinusreihe darstellen lässt.

(b) Zeigen Sie

$$g(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\left((2k+1)x\right)}{(2k+1)^3}, \quad x \in (-\pi,\pi).$$

(c) Verwenden Sie das Ergebnis aus (b), um die Summe

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots$$

zu berechnen.

(d) Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Parseval auch

$$1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \ldots.$$

Aufgabe 3. [14]

(a) Berechnen Sie mit Hilfe des Divergenzsatzes den Flächeninhalt der Ellipse

$$E_{a,b} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \right\}, \quad a, b > 0.$$

(b) Sei nun $G = E_{1,1} \times [0, 3]$. Skizzieren Sie G und berechnen Sie das Volumen sowie die z-Koordinate des geometrischen Schwerpunkts von G.

(c) Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß das Integral

$$\iint_{\partial G} F \cdot \, \mathrm{d}\vec{O}$$

für das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) = (4x, -2y^2, z^2)^\top.$$

(d) Sei $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein differenzierbares Vektorfeld und $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ein differenzierbares Skalarfeld. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{rot}(\varphi A) = \varphi \cdot \operatorname{rot}(A) + (\nabla\varphi) \times A.$$

Aufgabe 4. [13]

(a) Für $a > 0$ seien die Funktionen

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-a, a] \\ 0, & x \notin [-a, a] \end{cases} \qquad \text{und} \qquad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f_2(x) := \mathrm{e}^{-a|x|}$$

gegeben. Berechnen Sie die Fouriertransformierte

(i) $\hat{f}_1$, **(ii)** $\hat{f}_2$.

(b) Nutzen Sie Aufgabenteil **(a)** und den Satz von Plancherel, um die folgenden Integrale zu berechnen.

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(ax)}{x^2} \, \mathrm{d}x$, **(ii)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} \, \mathrm{d}x$, $a > 0$.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Fouriertransformation, dass Lösungen u der Gleichung

$$\frac{n}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-n|t-s|} u(s) \, \mathrm{d}s = f(t), \quad n \in \mathbb{N}, \; f \in \mathcal{S},$$

von der Form

$$u(t) = -\frac{1}{n^2} f''(t) + f(t)$$

sind.

Aufgabe 5. [10]

Gegeben sei die Differenzialgleichung

$$y''(x) - 9y'(x) + 20y(x) = g(x) \tag{1}$$

mit einer Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sowie die beiden Funktionen

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) := x, \qquad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_2(x) := e^{2x}.$$

(a) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem von (1) mit $g \equiv 0$.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (1) mit

(i) $g(x) = f_1(x)$, **(ii)** $g(x) = f_2(x)$, **(iii)** $g(x) = (f_2 \circ f_1)(2x)$.

Aufgabe 6. [16]

(a) Bestimmen Sie die Lage der Singularitäten und berechnen Sie die Residuen folgender Funktionen:

(i) $f_1(z) := \dfrac{1}{z^4 + 5z^2 + 4}$, **(ii)** $f_2(z) := \dfrac{\frac{\pi}{2} - z}{\cos(z)}$, **(iii)** $f_3(z) := \dfrac{1}{z\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})\right)}$.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 5x^2 + 4} \, \mathrm{d}x.$$

(c) Berechnen Sie

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\frac{5}{4} - \cos(t)} \, \mathrm{d}t,$$

indem Sie die Funktion f_3 aus Aufgabenteil **(a)** nutzen und das Integral als ein komplexes Kurvenintegral über den Einheitskreis schreiben.

(d) Sei $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Liouville, dass p mindestens eine Nullstelle besitzt.

Aufgabe 7. [14]

(a) Geben Sie

(i) die Wärmeleitungsgleichung

(ii) die Wellengleichung

(iii) die Helmholtzsche Schwingungsgleichung

auf dem $\mathbb{R}^n$ an.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Separationsansatzes eine Lösung des folgenden Randanfangswertproblems

$$\begin{cases} 2u_{tt}(t,x) = u_{xx}(t,x), & t \in (0,\infty),\ x \in (0,\pi), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & t \in (0,\infty), \\ u_t(0,x) = 2\sin(x)\cos(x), & x \in (0,\pi). \end{cases}$$

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Charakteristikenmethode eine Lösung des folgenden Randwertproblems

$$\begin{cases} xu_t - t^5 u_x = 0, & t, x \in (0,\infty), \\ u(0,x) = x, & x \in (0,\infty). \end{cases}$$

© poschel@mathematik.uni-stuttgart.de
simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de