Klausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (*1 Punkt*)

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Studiengang:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamt
Punkte	/1	/12	/12	/14	/12	/13	/10	/74

Nützliche Werte

Tabelle der Exponentialfunktion $e^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ für ausgewählte Werte von x:

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
e^x	1.11	1.22	1.35	1.49	1.65	1.82	2.01	2.23	2.46	2.72	3.00	3.32	3.67	4.06	4.48	4.95	5.47	6.05	6.69	7.39
e^{-x}	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368	.333	.301	.273	.247	.223	.202	.183	.165	.150	.135

Tabelle für das Integral $\int_0^x \varphi(t)\,dt$ über die Normalverteilung $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$:

	x+0.00	x+0.01	x+0.02	x+0.03	x+0.04	x+0.05	x+0.06	x+0.07	x+0.08	x+0.09
$x = 0.0$	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41308	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

Ablesebeispiele: Für $x = 1.23$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,dt \approx 0.39065$. Für $x = 2.58$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,dt \approx 0.49506$.

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.

Aufgabe 2. *Verständnisfragen* (*2+2+2+2+2+2 = 12 Punkte*)

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegenbeispiels).

2A. Auf dem $\mathbb{R}$–Vektorraum $V = \left\{ f(x) = a_0 + a_1\,\mathrm{e}^{x} + a_2\,\mathrm{e}^{2x} + a_3\,\mathrm{e}^{3x} \;\middle|\; a_k \in \mathbb{R} \right\}$ betrachten wir die Ableitung $\partial : V \to V : f \mapsto f'$ als lineare Abbildung. Ist ∂ diagonalisierbar?

Begründete Antwort:

$\overline{}$ 2

2B. Auf dem $\mathbb{R}$–Vektorraum $W = \mathbb{R}[x]_{\le 3} = \{ f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \mid a_k \in \mathbb{R} \}$ betrachten wir die Ableitung $\partial : W \to W : f \mapsto f'$ als lineare Abbildung. Ist ∂ diagonalisierbar?

Begründete Antwort:

$\overline{}$ 2

2C. Gibt es eine Differentialgleichung $y(x)' = a + b\,y(x) + c\,y(x)^2$ mit Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$, die keine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erlaubt?

Begründete Antwort:

$\overline{}$ 2

2D. Hat jede partielle Differentialgleichung $(ax+by)\,\partial_x u(x,y)+x\,\partial_y u(x,y)=0$ mit Konstanten $a,b\in\mathbb{R}$ und Startwerten $u(x,0)=\sin(x)$ genau eine Lösung $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$?

Begründete Antwort:

2

2E. Im Raum $\mathbb{R}^3$ betrachten wir $E=\{\,(0,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid |y|\ge 1\,\}$, eine Ebene mit Einzelspalt, und ihr Komplement $U=\mathbb{R}^3\smallsetminus E$. Hat jedes rotationsfreie Vektorfeld $f:U\to\mathbb{R}^3$ ein Potential?

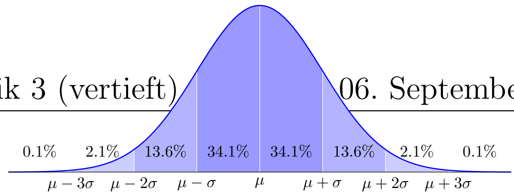
Begründete Antwort:

2

2F. Wir betrachten $D=\{\,(0,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid |y|\le 1 \text{ oder } |y|\ge 3\,\}$, eine Ebene mit Doppelspalt, und ihr Komplement $V=\mathbb{R}^3\smallsetminus D$. Hat jedes rotationsfreie Vektorfeld $f:V\to\mathbb{R}^3$ ein Potential?

Begründete Antwort:

2



Aufgabe 3. *Wahrscheinlichkeitsrechnung (4+3+3+2 = 12 Punkte)*

3A. Bei einer Wahl mit 1 Million Stimmberechtigten stimmten 45% für Kandidat A, 35% für B und 20% für C. Nach der Wahl befragen Sie 2500 zufällig ausgewählte Wähler. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p liegt dabei die Anzahl der C-Wähler zwischen 470 und 530 einschließlich? (Ergebnis wie üblich in Prozent, gerundet auf den nächstgelegenen Prozentpunkt)

4

3B. Cambridge Analytica platziert eine gezielte Werbung W für C-Wähler in sozialen Medien; dank Targeting erreicht die Werbung 10% der A-Wähler, 30% der B-Wähler und 75% der C-Wähler. Mit welcher Wkt q (in %) ist ein zufällig ausgewählter Werbeempfänger ein C-Wähler?

$q =$

3

3C. Zur Besetzung einer Juniorprofessur laden Sie fünf Bewerber ein. Erfahrungsgemäß sagt jeder dritte ab (zufällig, unabhängig voneinander). Mit welcher Wkt erscheinen $X = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ Bewerber? (Antwort exakt als gekürzter Bruch und gerundet auf den nächsten Prozentpunkt.)

Anzahl $k =$	0	1	2	3	4	5
exakt $\mathbf{P}(X=k) =$	$\frac{1}{243}$	$\frac{10}{243}$				$\frac{32}{243}$
gerundet $\mathbf{P}(X=k) \approx$	0.00	0.04				0.13

3

3D. In einer Lostrommel liegen 10 Kugeln, davon 4 rote und 6 schwarze. Sie ziehen drei Kugeln zufällig ohne Zurücklegen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p ziehen Sie genau eine rote und zwei schwarze Kugeln? (Ansatz als Formel und Ergebnis als gekürzter Bruch.)

$p =$

2

Aufgabe 4. *Differentialgleichungen (7+7 = 14 Punkte)*

Zu lösen ist für $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Differentialgleichung $y + \left[1 - \mathrm{e}^{-x} y\right] y' = 0$ mit $y(0) = -1$.

4A. Ist diese Differentialgleichung exakt? Berechnen Sie hierzu die Rotation des zugehörigen Vektorfeldes $(f, g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$\operatorname{rot}(f, g) =$

Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor λ, der nur von x oder y abhängt:

4

Bestimmen Sie zum skalierten Vektorfeld $\lambda \cdot (f, g)$ das Potential $\Phi(x, y)$ mit $\Phi(0, -1) = 0$:

$\Phi(x, y) =$

Lösen Sie damit die Differentialgleichung $y + \left[1 - \mathrm{e}^{-x} y\right] y' = 0$ zum Startwert $y(0) = -1$.

$y(x) =$

3

4B. Zu lösen ist für $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (t,x) \mapsto u(t,x)$ die partielle Differentialgleichung

$$\partial_t u(t,x) + \cos(t)\,\partial_x u(t,x) = \tfrac{3}{2}\sqrt{t} \qquad \text{für alle } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R},$$
$$u(0,x) = \mathrm{e}^x \qquad \text{für } t = 0 \text{ und alle } x \in \mathbb{R}.$$

Geben Sie das charakteristische Differentialgleichungssystem zu $u(t(s), x(s)) = z(s)$ an:

$t'(s) = \quad 1,$ $\qquad t(0) = 0,$

$x'(s) = \boxed{}\,,$ $\qquad x(0) = x_0,$

$z'(s) = \boxed{}\,,$ $\qquad z(0) = \mathrm{e}^{x_0}.$

Bestimmen Sie damit die zugehörige Charakteristik $s \mapsto (t(s), x(s), z(s))$:

$t(s) = s,$ $\quad x(s) = \boxed{}\,,$ $\quad z(s) = \boxed{}$

Bestimmen Sie damit die gesuchte Lösung:

$u(t,x) = \boxed{}$

Machen Sie schließlich die Probe:

$\partial_t u(t,x) = \boxed{}$

$\cos(t)\,\partial_x u(t,x) = \boxed{}$

$\overline{7}$

Aufgabe 5. *Lineare Differentialgleichungssysteme* (*2+3+3+4 = 12 Punkte*)

Zu lösen ist $y'(t) = A\,y(t)$. Gegeben sind hierzu die Systemmatrix A und drei Vektoren:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1+\mathrm{i} \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5A. Einer der Vektoren u_1, u_2, u_3 ist ein Eigenvektor von A: Welcher und zu welchem Eigenwert?

Eigenvektor $v_1 =$ zum Eigenwert $\lambda_1 =$

2

Einer der Vektoren u_1, u_2, u_3 ist ein Hauptvektor zweiter Stufe von A zum Eigenwert $\lambda_3 = \lambda_4 = \mathrm{i}$. Geben Sie die Hauptvektorkette $v_4 \mapsto v_3 \mapsto 0$ aus Hauptvektor v_4 und Eigenvektor v_3 an:

$v_4 =$ $\mapsto$ $v_3 =$

Bestimmen Sie $v_2 \in \mathbb{C}^4$ so, dass (v_1, v_2, v_3, v_4) eine Basis aus Hauptvektorketten bildet:

$v_2 =$

3

5B. Bestimmen Sie die Lösung $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^4$ mit $y_1'(t) = A\,y_1(t)$ und $y_1(0) = v_1$:

$y_1(t) =$

Bestimmen Sie die Lösung $y_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^4$ mit $y_4'(t) = A\,y_4(t)$ und $y_4(0) = v_4$.

$y_4(t) =$

Bestimmen Sie die Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^4$ mit $y'(t) = A\,y(t)$ und $y(0) = u_1$.

$y(t) =$

3

5C. Variation der Konstanten: Das inhomogene DGSystem $y'(t) = A\,y(t) + 2t(\cos t, \sin t, 0, \sin t)$ mit $y(0) = 0$ besitzt eine Lösung der Form $y_p(t) = c(t)(\cos t, \sin t, 0, \sin t)$. Berechnen Sie:

$y_p'(t) =$

$Ay_p(t) =$

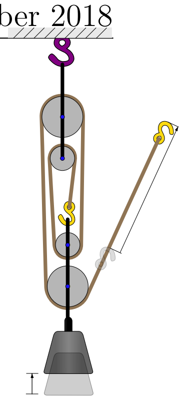
Einsetzen in unser inhomogenes DGSystem ergibt folgende Differentialgleichung für c:

$c'(t) =$

Die gesuchte Lösung zum Anfangswert $y(0) = 0$ ist daher:

$c(t) =$

4



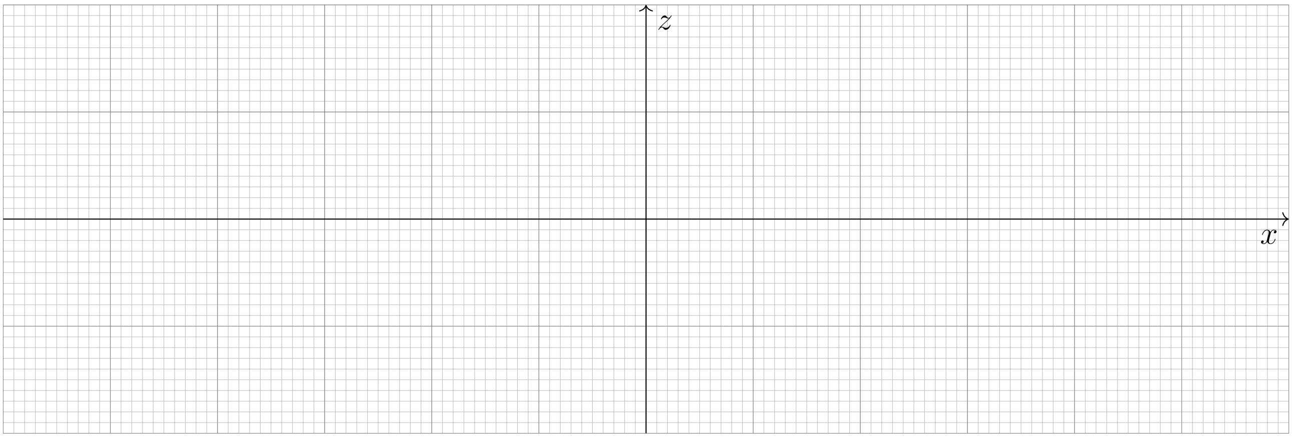
Aufgabe 6. *Dreidimensionale Integrale und Integralsätze* (*2+4+3+4 = 13 Punkte*)

Der Rotationskörper $K \subset \mathbb{R}^3$ und das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} z^2 \le 1 \\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4\cosh(z)^2 \end{array} \right\} \quad \text{und} \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \mathrm{e}^{x^2/4}\,\mathrm{e}^{y^2/4} \end{pmatrix}.$$

Erinnerung: Es gilt $\cosh(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}$ und $\sinh(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2}$.

6A. Skizzieren Sie den Schnitt von K mit der x–z–Ebene, also mit der Ebene $y = 0$:



Parametrisieren Sie den Körper K in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ -1 \le z \le 1 \\ \boxed{\qquad\qquad} \le \rho \le \boxed{\qquad\qquad} \end{cases}$$

/ 2

6B. Berechnen Sie mit dieser Parametrisierung das Volumen $\mathrm{vol}_3(K) \approx 29$ des Körpers K:

$\mathrm{vol}_3(K) =$

/ 4

6C. Die Randfläche ∂K besteht aus dem Boden B mit $z = -1$, dem Deckel D mit $z = +1$, dem Mantel M und dem Zylinder Z. Berechnen Sie den Fluss von f aus K heraus durch D:

$$I_D = \int_{s \in D} f(s) \bullet \mathrm{d}S =$$

Folgern Sie den Fluss I_B des Vektorfeldes f aus K heraus durch den Boden B:

$$I_B = \int_{s \in B} f(s) \bullet \mathrm{d}S =$$

3

6D. Berechnen Sie den Fluss I_Z des Vektorfeldes f aus K heraus durch den Zylinder Z:

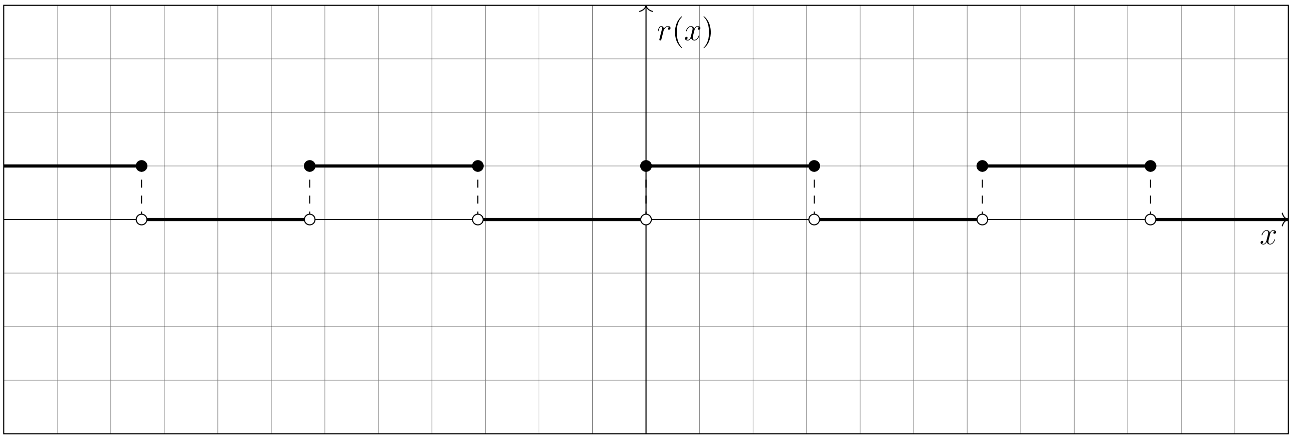
$$I_Z = \int_{s \in Z} f(s) \bullet \mathrm{d}S =$$

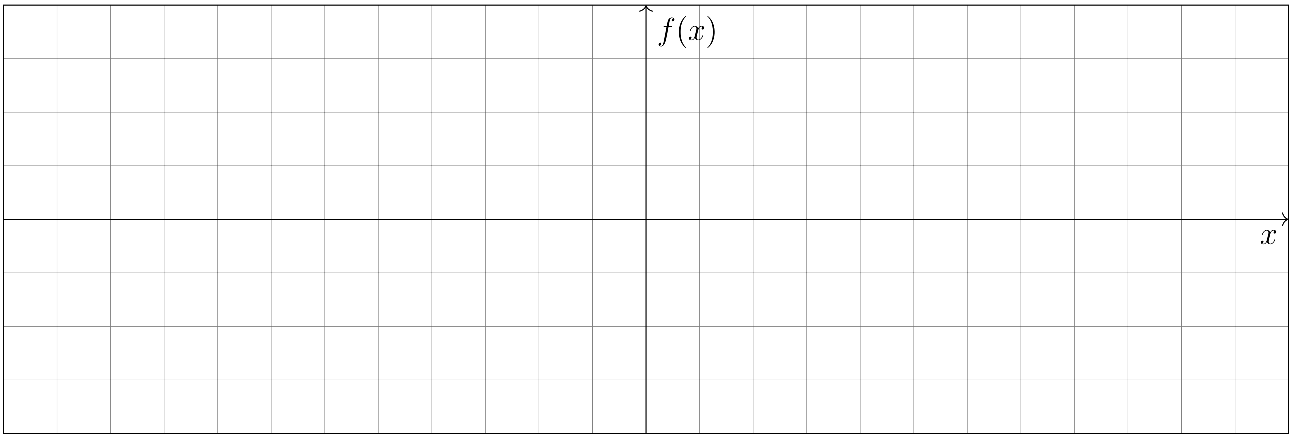
Folgern Sie den Fluss I_M des Vektorfeldes f aus K heraus durch den Mantel M:

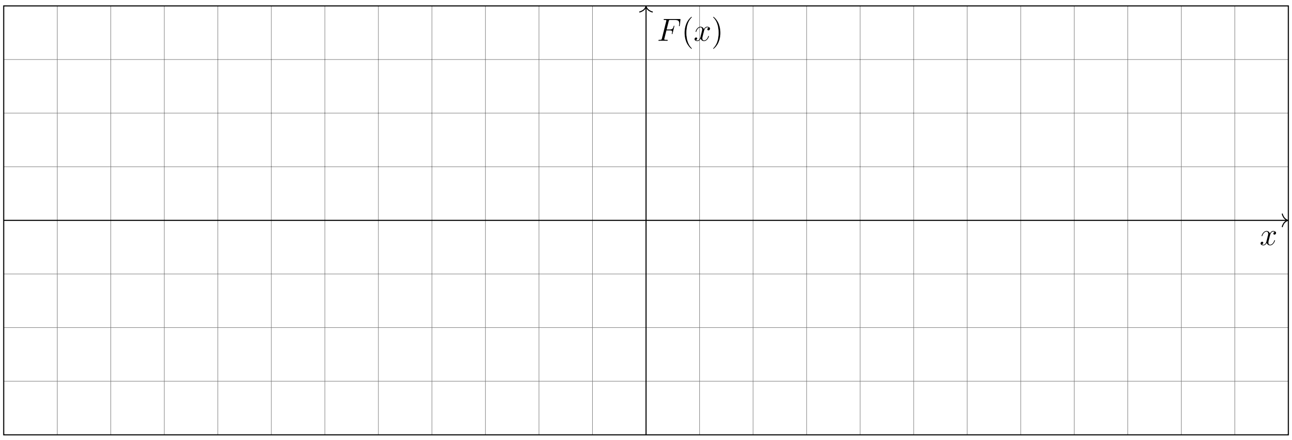
4

Aufgabe 7. *Fourier–Reihen* (*3+3+2+2 = 10 Punkte*)

7A. Die Rechteckfunktion $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei 2π–periodisch mit $r(x) = 0$ für $-\pi < x < 0$ und $r(x) = 1$ für $0 \le x \le \pi$. Skizzieren Sie $f(x) = r(x)\cos(x)$ und $F(x) = \int_{t=0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ auf $[-12, 12]$:







Bestimmen Sie den Grenzwert der Fourier–Reihe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von f im Punkt $x = \pi$:

$\lim_{n\to\infty} f_n(\pi) =$ 3

7B. Berechnen Sie die Koeffizienten γ_k der komplexen Fourier–Reihe $r(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$:

$$\gamma_k = \begin{cases} \boxed{} & \text{für } k = 0, \\ \boxed{} & \text{für } k \text{ ungerade}, \\ \boxed{} & \text{für } k \neq 0 \text{ gerade.} \end{cases}$$

3

Erinnerung: Dank der Euler–Formel $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$ gilt

$$\cos(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} \quad \text{und} \quad \sin(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}.$$

Tipp: Das hilft beim Ausmultiplizieren von $f(x) = r(x)\cos(x)$.

7C. Folgern Sie die Koeffizienten c_k der komplexen Fourier–Reihe

$$f(x) \sim \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{4} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} :$$

$$c_k = \begin{cases} \boxed{} & \text{für } k \text{ gerade}, \\ \boxed{} & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

2

7D. Folgern Sie die Koeffizienten C_k der komplexen Fourier–Reihe

$$F(x) \sim \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{4\mathrm{i}} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} C_k \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} :$$

$$C_k = \begin{cases} \boxed{} & \text{für } k \text{ gerade}, \\ \boxed{} & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

2

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.