Universität Stuttgart
**Modulklausur** Mathematik für inf swt msv im Sommersemester 2018 — A. Kollross

| Nachname: | Vorname: | Matrikelnummer: |
| --- | --- | --- |
| | | |

**Bitte beachten Sie:** Es sind keinerlei Hilfsmittel zulässig. Benutzen Sie für die Lösungen eigene Blätter und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Es sind insgesamt 56 Punkte zu erreichen, die Hälfte davon ist ausreichend zum Bestehen. Lösungen ohne Angabe eines nachvollziehbaren Lösungsweges können nicht gewertet werden.

**Bitte auswählen und ankreuzen:**

- ☐ *Ich studiere **Informatik**.*
- ☐ *Ich studiere **Softwaretechnik**.*
- ☐ *Ich studiere **Maschinelle Sprachverarbeitung**.*
- ☐ *Keines der obigen, sondern:* ____________________

Unterschrift: ________________________________________

---

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Summe |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Punkte | | | | | | | | | | |

Korrekturvermerke: Korrektor/in:

**Aufgabe 1** (Vollständige Induktion) (7 Punkte)
Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass
$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$
für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

**Aufgabe 2** (Lineares Gleichungssystem) (7 Punkte)
Gegeben seien die reelle $2 \times 3$–Matrix
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 4 & 9 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$
Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

**Aufgabe 3** (Eigenwerte) (7 Punkte)
Sei die folgende reelle Matrix gegeben:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von $A$.
b) Entscheiden Sie, ob $A$ diagonalisierbar ist und begründen Sie Ihre Antwort.

**Aufgabe 4** (Darstellende Matrix einer linearen Abbildung) (7 Punkte)
Sei eine lineare Abbildung
$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-y \\ 4x+3y \end{pmatrix}$$
gegeben.

a) Geben Sie die darstellende Matrix von $f$ bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ an.
b) Sei nun die Basis
$$\mathscr{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$
gegeben. Bestimmen Sie die darstellende Matrix von $f$ bezüglich der Basis $\mathscr{B}$.

**Aufgabe 5** (Folgen) (6 Punkte)
Entscheiden Sie, ob die nachstehenden reellen bzw. komplexen Zahlenfolgen konvergieren.
$$\text{a)} \quad a_n = i^n \qquad \text{b)} \quad b_n = \frac{n + \sin(n)}{n + \cos(n)} \qquad \text{c)} \quad c_n = \frac{n}{e^n}$$
Begründen Sie Ihre Antworten und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

**Aufgabe 6** (Konvergenzradius von Potenzreihen) (4 Punkte)
Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

$$\text{a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n+1} x^n \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} x^n$$

**Aufgabe 7** (Lokale Extrema) (6 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = 4\,x^2 + 2\,xy + y^2 - 8\,x - 2\,y + y^3.$$

a) Bestimmen Sie die Jacobimatrix $\mathrm{D}f(x,y)$ und die Hessematrix $\mathrm{Hess}f(x,y)$ für einen beliebigen Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
b) Bestimmen Sie $\mathrm{D}f(1,0)$ und $\mathrm{Hess}f(1,0)$ und zeigen Sie, dass die Funktion $f$ im Punkt $(1,0)$ ein isoliertes Minimum hat.

**Aufgabe 8** (Taylorpolynome) (6 Punkte)

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom dritter Ordnung der Funktion $f(x) = e^x \cos(x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.
b) Benutzen Sie das Restglied nach Lagrange, um zu zeigen, dass auf dem Intervall $[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$ der Wert des Taylorpolynomes von dem der Funktion $f$ um weniger als 0,05 abweicht.

**Aufgabe 9** (Verschiedenes) (6 Punkte)
Bestimmen Sie die folgenden reellen bzw. komplexen Zahlenwerte.

$$\text{a)} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^3 \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{\frac{n}{2}}}{3^n} \qquad \text{c)} \int_0^1 \int_{-y}^{+y} x^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

*Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!*