Mathematik für inf swt msv im SS 2018
Lösungsvorschläge zur Modulklausur

Aufgabe 1 (Vollständige Induktion) (7 Punkte)
Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Lösung zu Aufgabe 1 *Induktionsanfang:* Die Behauptung gilt für $n = 1$, denn:

$$1^3 = 1 = 1^2(2 \cdot 1^2 - 1).$$

Induktionsschritt: Es gilt einerseits nach Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned}
&1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 + (2n+1)^3 = \\
&\quad = n^2(2n^2-1) + (2n+1)^3 = 2n^4 - n^2 + 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 = \\
&\quad = 2n^4 + 8n^3 + 11n^2 + 6n + 1.
\end{aligned}$$

Andererseits ergibt die rechte Seite der Behauptung, wenn man $n+1$ anstelle von n einsetzt:

$$\begin{aligned}
&(n+1)^2(2(n+1)^2 - 1) = (n^2+2n+1)(2n^2+4n+1) = \\
&\quad = 2n^4 + 4n^3 + n^2 + 4n^3 + 8n^2 + 2n + 2n^2 + 4n + 1 = \\
&\quad = 2n^4 + 8n^3 + 11n^2 + 6n + 1.
\end{aligned}$$

Somit ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gezeigt.

Aufgabe 2 (Lineares Gleichungssystem) (7 Punkte)
Gegeben seien die reelle 2×3–Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 4 & 9 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

Lösung zu Aufgabe 2 Das Anwenden des Gaußalgorithmus auf die erweiterte Matrix liefert:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & 5 \\ 4 & 9 & -2 & -10 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 10 \end{array}\right)$$

Es gibt also 2 Pivotvariablen und einen freien Parameter. Setze $x_3 := t$.
Rückwärtseinsetzen liefert:

$$x_2 = 10 - 2t \quad \text{und} \quad x_1 = -2(10-2t) + t - 5 = -25 + 5t.$$

Die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist also

$$\left\{ \begin{pmatrix} -25+5t \\ 10-2t \\ t \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} -25 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (Eigenwerte) (7 Punkte)
Sei die folgende reelle Matrix gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.
b) Entscheiden Sie, ob A diagonalisierbar ist und begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Wir bestimmen das charakteristische Polynom von A:

$$\chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 0 & 0 \\ 2 & -t & 1 \\ 0 & 1 & 2-t \end{pmatrix} = -t\left(t^2 - 2\,t - 1\right)$$

wobei wir nach der ersten Zeile entwickelt haben. Offensichtlich ist 0 eine Nullstelle, die anderen sind gegeben durch $\frac{1}{2}(2 \pm \sqrt{4+4}) = 1 \pm \sqrt{2}$.

b) Die Matrix ist diagonalisierbar, da sie drei verschiedene Eigenwerte hat.

Aufgabe 4 (Darstellende Matrix einer linearen Abbildung) (7 Punkte)
Sei eine lineare Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-y \\ 4x+3y \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Geben Sie die darstellende Matrix von f bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ an.
b) Sei nun die Basis

$$\mathscr{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

gegeben. Bestimmen Sie die darstellende Matrix von f bezüglich der Basis $\mathscr{B}$.

Lösung zu Aufgabe 4

a) Man liest die darstellende Matrix direkt ab:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Wir bilden die Transformationsmatrix aus den Vektoren in $\mathscr{B}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

und bestimmen ihre Inverse:

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Die gesuchte Matrix ist

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5 (Folgen) (6 Punkte)
Entscheiden Sie, ob die nachstehenden reellen bzw. komplexen Zahlenfolgen konvergieren.

$$\text{a)} \quad a_n = i^n \qquad \text{b)} \quad b_n = \frac{n + \sin(n)}{n + \cos(n)} \qquad \text{c)} \quad c_n = \frac{n}{e^n}$$

Begründen Sie Ihre Antworten und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Lösung zu Aufgabe 5

a) Die Folge divergiert, denn es gilt z.B. $a_{4n} = 1$, $a_{4n+2} = -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Es gilt

$$\frac{n + \sin(n)}{n + \cos(n)} = \frac{1 + \frac{1}{n}\sin(n)}{1 + \frac{1}{n}\cos(n)} \longrightarrow 1,$$

denn wegen $|\frac{1}{n}\sin(n)| \leq \frac{1}{n}$ gilt $\frac{1}{n}\sin(n) \longrightarrow 0$ und analog gilt $\frac{1}{n}\cos(n) \longrightarrow 0$.

c) Es gilt $\frac{e^n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} > \frac{n}{2} \longrightarrow \infty$. Die Folge c_n ist somit eine Nullfolge.

Aufgabe 6 (Konvergenzradius von Potenzreihen) (4 Punkte)
Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

$$\text{a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n+1} x^n \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} x^n$$

Lösung zu Aufgabe 6

a) Wir berechnen:

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{n!}{n+1} \cdot \frac{n+2}{(n+1)!} = \frac{n+2}{(n+1)^2} \longrightarrow 0.$$

Der Konvergenzradius ist Null.

b) Wir berechnen:

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{3^n}{n} \cdot \frac{n+1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{n+1}{n} \longrightarrow \frac{1}{3}.$$

Der Konvergenzradius ist $\frac{1}{3}$.
Alternative Lösung: Wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} x^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (-3x)^n = -\ln(1-3x)$$

ist der Konvergenzradius $\frac{1}{3}$ mal dem Konvergenzradius der Reihe $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$, die den Konvergenzradius 1 hat.

Aufgabe 7 (Lokale Extrema) (6 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = 4\,x^2 + 2\,xy + y^2 - 8\,x - 2\,y + y^3.$$

a) Bestimmen Sie die Jacobimatrix $\mathrm{D}f(x,y)$ und die Hessematrix $\mathrm{Hess}f(x,y)$ für einen beliebigen Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
b) Bestimmen Sie $\mathrm{D}f(1,0)$ und $\mathrm{Hess}f(1,0)$ und zeigen Sie, dass die Funktion f im Punkt $(1,0)$ ein isoliertes Minimum hat.

Lösung zu Aufgabe 7

a) Man berechnet:

$$\mathrm{D}f(x,y) = (8\,x + 2\,y - 8, 2\,x + 2\,y - 2 + 3\,y^2)$$

und

$$\mathrm{Hess}f(x,y) = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 2 + 6\,y \end{pmatrix}.$$

b) Es gilt

$$\mathrm{D}f(1,0) = (0,0), \qquad \mathrm{Hess}f(1,0) = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Funktion hat also einen kritischen Punkt bei (1,0) .
Die Hessematrix von f ist am Punkt $(1,0)$ positiv definit, denn:

$$8 > 0, \qquad \det(\mathrm{Hess}f(1,0)) = 8 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 12 > 0.$$

Es handelt sich somit um ein isoliertes lokales Minimum .

Aufgabe 8 (Taylorpolynome) (6 Punkte)

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom dritter Ordnung der Funktion $f(x) = e^x \cos(x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.
b) Benutzen Sie das Restglied nach Lagrange, um zu zeigen, dass auf dem Intervall $[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$ der Wert des Taylorpolynomes von dem der Funktion f um weniger als 0,05 abweicht.

Lösung zu Aufgabe 8

a) Das Taylorpolynom hat die Gestalt

$$p(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{6}\,x^3.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x \cos(x) - e^x \sin(x)\,, \\ f''(x) &= -2\,e^x \sin(x)\,, \\ f'''(x) &= -2\,e^x \sin(x) - 2\,e^x \cos(x)\,. \end{aligned}$$

und somit

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = 1, \qquad f''(0) = 0, \qquad f'''(0) = -2.$$

Wir erhalten also

$$p(x) = 1 + x - \frac{1}{3}x^3.$$

für das Taylorpolynom.

b) Um das Restglied nach Lagrange zu bestimmen, berechnen wir

$$f^{(4)}(x) = -4\, e^x \cos(x)\,.$$

Das Lagrangesche Restglied ist gegeben durch

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4,$$

wobei ξ zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ liegt. Es gilt

$$|f^{(4)}(\xi)| \leq 4 \cdot \sqrt{e} \cdot 1 < 4 \cdot 2 \cdot 1 = 8,$$

somit $|R_3(x)| < \frac{8}{4!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{48} < 0{,}05$.

Aufgabe 9 (Verschiedenes) (6 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden reellen bzw. komplexen Zahlenwerte.

$$\text{a)} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^3 \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{\frac{n}{2}}}{3^n} \qquad \text{c)} \int_0^1 \int_{-y}^{+y} x^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

Lösung zu Aufgabe 9

a) Wir berechnen:

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 + 3i + 3i^2 + i^3) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 + 3i - 3 - i) = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}.$$

b) Mit der Summenformel für die geometrische Reihe folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{\frac{n}{2}}}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} - 1 = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 1 = 3 - 1 = 2.$$

c) Wir berechnen:

$$\int_0^1 \int_{-y}^{+y} x^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-y}^{+y} \mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{2}{3}y^3 \,\mathrm{d}y = \left[\frac{1}{6}y^4\right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$