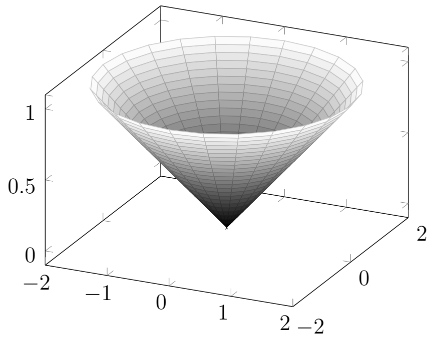
Aufgabe 1 (*9 Punkte*)
Es sei die Fläche $S \subseteqq \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$S := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4z^2 = x^2 + y^2 \leqq 4, z \geqq 0\right\}.$$



(a) (*2 Punkte*) Geben Sie eine Parametrisierung für S an.

(b) (*4 Punkte*) Berechnen Sie den Flächeninhalt von S.

(c) (*3 Punkte*) Berechnen Sie die Zirkulation $Z(g, \partial S)$ des Vektorfelds $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ entlang ∂S, wobei

$$g(x, y, z) := \begin{pmatrix} y \\ -z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a)

$$\Phi : [0, 2] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3,$$
$$(r, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ \frac{r}{2} \end{pmatrix}.$$

(b)

$$\Phi'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \partial_1\Phi \times \partial_2\Phi = \begin{pmatrix} -\frac{r}{2}\cos\varphi \\ -\frac{r}{2}\sin\varphi \\ r \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} F(S) = \int_S 1 \,\mathrm{d}O &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} |\partial_1\Phi \times \partial_2\Phi| \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{\tfrac{r^2}{4}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + r^2} \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} \int_0^2 2\pi r \,\mathrm{d}r \\ &= 2\sqrt{5}\pi. \end{aligned}$$

(c) Mit dem Satz von Stokes gilt

$$
\begin{aligned}
Z(g,\partial S) &= \int_{\partial S} g \cdot \mathrm{d}s \\
&= \int_S \operatorname{rot} g \cdot n \,\mathrm{d}O \qquad\qquad \operatorname{rot} g = \begin{pmatrix} \partial_2 g_3 - \partial_3 g_2 \\ \partial_3 g_1 - \partial_1 g_3 \\ \partial_1 g_2 - \partial_2 g_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \\
&= \int_0^2 \int_{-\pi}^{\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{r}{2}\cos\varphi \\ -\frac{r}{2}\sin\varphi \\ r \end{pmatrix} \mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^2 \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{r}{2}\cos\varphi - r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r \\
&= -\int_0^2 \frac{r}{2}[\sin\varphi + 2\varphi]_{\varphi=-\pi}^{\varphi=\pi} \,\mathrm{d}r \\
&= -2\pi \int_0^2 r \,\mathrm{d}r \\
&= -4\pi.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2 (*11 Punkte*) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y^{(3)} + 3y^{(2)} - 4y = 3e^x - 4\cos(2x)\ .$$

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung.

SCHRITT 1: In einem ersten Schritt löst man die homogene Gleichung $y^{(3)}+3y^{(2)}-4y=0$. Das charakteristische Polynom $P(X)$ dieser Differentialgleichung ist $P(X) = X^3+3X^2-4$. Eine offensichtliche Nullstelle von P ist 1.

$$P(X) = X^3 + 3X^2 - 4 = (X-1)(X^2+4X+4) = (X-1)(X+2)(X+2)$$

und hat die übrige zweifache Nullstelle -2.
Die allgemeine homogene Lösung f_h ist dann:

$$f_h(x) = ae^x + be^{-2x} + cxe^{-2x}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

SCHRITT 2: In einem zweiten Schritt bestimmt man nun irgendeine beliebige (partikuläre) Lösung der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung durch einen Ansatz nach Art der rechten Seite.

Partikuläre Lösung durch Ansatz nach Art der rechten Seite
Aufgrund des Superpositionsprinzips bekommt man eine partikuläre Lösung f_p von $y^{(3)}+3y^{(2)}-4y = 3e^x - 4\cos(2x)$, indem man eine partikuläre Lösung f_{p_1} von $y^{(3)}+3y^{(2)}-4y = 3e^x$ und eine partikuläre Lösung f_{p_2} von $y^{(3)}+3y^{(2)}-4y = -4\cos(2x)$ bestimmt und diese beiden addiert: $f_p = f_{p_1} + f_{p_2}$.

- Zunächst zu $y^{(3)}+3y^{(2)}-4y = 3e^x$:
  Weil 1 eine einfache Nullstelle von P ist (Resonanz), machen wir den Ansatz

  $$f_{p_1}(x) = \alpha x\, e^x.$$

  Dreimaliges Ableiten ergibt

  $$\begin{aligned} f'_{p_1}(x) &= \alpha e^x + \alpha x e^x, \\ f^{(2)}_{p_1}(x) &= 2\alpha e^x + \alpha x e^x, \\ f^{(3)}_{p_1}(x) &= 3\alpha e^x + \alpha x e^x. \end{aligned}$$

  Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so erhält man

  $$9\alpha e^x = 3e^x$$

  und damit $\alpha = 1/3$. Also

  $$f_{p_1}(x) = \frac{1}{3} x e^x.$$

- Jetzt zu $y^{(3)} + 3y^{(2)} - 4y = -4\cos(2x)$:
  Weil $\pm 2i$ keine Nullstelle von P ist (keine Resonanz), machen wir den Ansatz

$$f_{p_2}(x) = \alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x).$$

  Dreimaliges Ableiten ergibt

$$\begin{aligned} f'_{p_2}(x) &= -2\alpha\sin(2x) + 2\beta\cos(2x), \\ f^{(2)}_{p_2}(x) &= -4\alpha\cos(2x) - 4\beta\sin(2x), \\ f^{(3)}_{p_2}(x) &= 8\alpha\sin(2x) - 8\beta\cos(2x). \end{aligned}$$

  Setzt man diese Ableitungen in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$(8\alpha - 16\beta)\sin(2x) + (-16\alpha - 8\beta)\cos(2x) = -4\cos(2x).$$

  Damit ist $\alpha = 1/5$ und $\beta = 1/10$. Also

$$f_{p_2}(x) = \frac{1}{5}\cos(2x) + \frac{1}{10}\sin(2x).$$

Insgesamt erhalten wir $f_p(x) = f_{p_1}(x) + f_{p_2}(x) = \frac{1}{3}xe^x + \frac{1}{5}\cos(2x) + \frac{1}{10}\sin(2x)$.

SCHRITT 3: In einem dritten und letzten Schritt muss man schließlich noch die oben bestimmte allgemeine homogene Lösung und die oben bestimmte partikuläre Lösung addieren:

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = ae^x + be^{-2x} + cxe^{-2x} + \frac{1}{3}xe^x + \frac{1}{5}\cos(2x) + \frac{1}{10}\sin(2x)$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (*10 Punkte*) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{4x} \\ \mathrm{e}^{4x} \end{pmatrix}.$$

Seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h(x) := \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{4x} \\ \mathrm{e}^{4x} \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von A ist gegeben durch

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 7\lambda + 12\,.$$

Die Nullstellen dieses Polynoms und damit die Eigenwerte von A sind folglich

$$\lambda_{1/2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{7^2}{4} - 12} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49-48}{4}} = \frac{7 \pm 1}{2}\,,$$

d. h. es gilt

$$\lambda_1 = 3\,, \quad \lambda_2 = 4\,.$$

Um einen Eigenvektor zum Eigenwert 3 zu finden, müssen wir folgendes Gleichungssystem lösen:

$$\det(A - \lambda_1 E)v_1 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 0\,,$$

also $3y_1 - 2x_1 = 0$. Dies ist beispielsweise durch

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

erfüllt. Für den Eigenwert 4 gilt analog

$$\det(A - \lambda_2 E)v_2 = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0\,,$$

also $y_2 - x_2 = 0$. Dies ist beispielsweise durch

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erfüllt. Damit ergibt sich die allgemeine homogene Lösung als

$$y_{\mathrm{h}}(x) = c_1\,\mathrm{e}^{3x} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Die Wronski-Matrix ist somit gegeben durch

$$W(x) = \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^{3x} & \mathrm{e}^{4x} \\ 2\mathrm{e}^{3x} & \mathrm{e}^{4x} \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\det W(x) = 3\mathrm{e}^{7x} - 2\mathrm{e}^{7x} = \mathrm{e}^{7x}$$

und folglich

$$W(x)^{-1} = \mathrm{e}^{-7x} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{4x} & -\mathrm{e}^{4x} \\ -2\mathrm{e}^{3x} & 3\mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-3x} & -\mathrm{e}^{-3x} \\ -2\mathrm{e}^{-4x} & 3\mathrm{e}^{-4x} \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man

$$c'(x) = W(x)^{-1}h(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-3x} & -\mathrm{e}^{-3x} \\ -2\mathrm{e}^{-4x} & 3\mathrm{e}^{-4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{4x} \\ \mathrm{e}^{4x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also kann man beispielsweise

$$c(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

wählen und erhält als eine partikuläre Lösung

$$y_{\mathrm{p}}(x) = W(x)c(x) = \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^{3x} & \mathrm{e}^{4x} \\ 2\mathrm{e}^{3x} & \mathrm{e}^{4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\mathrm{e}^{4x} \\ x\mathrm{e}^{4x} \end{pmatrix}.$$

Zusammen ergibt sich die allgemeine inhomogene Lösung zu

$$y(x) = y_{\mathrm{h}}(x) + y_{\mathrm{p}}(x) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^{3x} \\ 2\mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{4x} \\ \mathrm{e}^{4x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x\mathrm{e}^{4x} \\ x\mathrm{e}^{4x} \end{pmatrix} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Aufgabe 4 (*10 Punkte*) Es ist die 2π-periodische Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \\ |x|, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \frac{\pi}{2} & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{cases} \qquad \text{und} \qquad f(x+2\pi) = f(x)$$

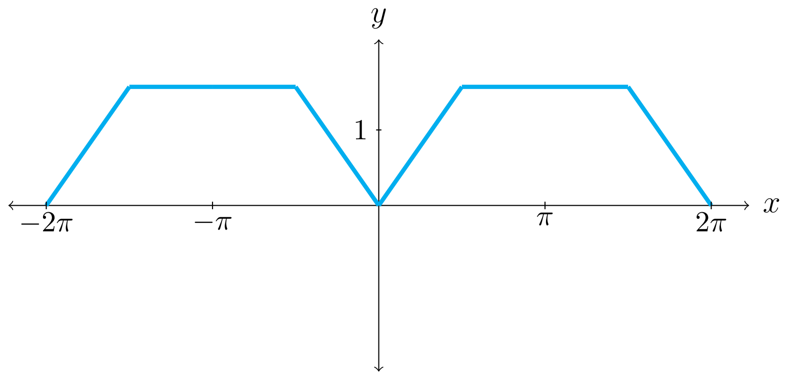
gegeben.

(a) (*2 Punkte*) Skizzieren Sie f auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi)$.

(b) (*7 Punkte*) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von f.
Hinweis: Terme der Form $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ und $\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ müssen ausgerechnet werden.

(c) (*1 Punkt*) Bestimmen Sie für alle $x \in [-\pi, \pi]$ den Grenzwert der Fourierreihe.

(a) Skizze:



(b) (1) Weil $f(x)$ gerade ist, gilt $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(2) Für a_0 errechnet man:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi}{2} dx = \frac{2}{\pi}\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

Die Koeffizienten a_n für $n > 0$ folgen durch Integration:

$$\begin{aligned}
a_n =& \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\cos(nx)dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos(nx)dx \\
=& \frac{2}{n\pi}[x\sin(nx)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{n\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(nx)dx + \frac{1}{n}[\sin(nx)]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
=& \frac{2}{n\pi}[x\sin(nx)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{n^2\pi}[-\cos(nx)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n}[\sin(nx)]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
=& \frac{2}{n\pi}\left(\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) + \frac{2}{n^2\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1\right) + \frac{1}{n}\left(\sin(n\pi) - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) \\
=& \frac{2}{n^2\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1\right) \\
=& \begin{cases} \frac{2}{(2k)^2\pi}((-1)^k - 1), & n = 2k \\ -\frac{2}{(2k+1)^2\pi}, & n = 2k+1 \end{cases}.
\end{aligned}$$

(3) Die Fourierreihe von f ist

$$f(x) \sim \frac{3\pi}{8} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k)^2\pi}((-1)^k - 1)\cos(2kx) - \frac{2}{(2k+1)^2\pi}\cos((2k+1)x).$$

Eine weitere Fallunterscheidung nach k gerade/ungerade ist möglich und führt auf

$$f(x) \sim \frac{3\pi}{8} - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^2\pi}\cos((4l+2)x) - \frac{2}{(4l+1)^2\pi}\cos((4l+1)x) - \frac{2}{(4l+3)^2\pi}\cos((4l+3)x).$$

(c) Die Funktion f ist stetig differenzierbar in den Intervallen $\left(-\frac{3}{2}\pi, -\pi\right), \left(-\pi, -\frac{1}{2}\pi\right), \left(-\frac{1}{2}\pi, 0\right), \left(0, \frac{1}{2}\pi\right), \left(\frac{1}{2}\pi, \pi\right), \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$ mit endlichen links- bzw. rechtseitigen Grenzwerten sowohl für f als auch f' in allen Punkten $\left\{-\pi, -\frac{1}{2}\pi, 0, \frac{1}{2}\pi, \pi\right\}$. Da die Funktion f insbesondere stetig ist in $[-\pi, \pi]$, konvergiert die Fourierreihe in $[-\pi, \pi]$ also gegen $f(x)$.