Universität Stuttgart

mathematik physik fakultät 8

Prof. Dr. M. Griesemer
M.Sc. M. Klumpp
M.Sc. D. Maier
M.Sc. D. Wittwar

Modulprüfung zur Vorlesung

Höhere Mathematik III
phys, kyb, mecha

WS 2018/2019

Mittwoch 27. Februar 2019, 14:00 – 17:00,

Nachname: ________________	Matrikelnr.: ________________	Studiengang:
Vorname: ________________	☐ BSc ☐ MSc ☐ _____	________________________

vom Korrektor auszufüllen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Max. Punktzahl	5	4	6	4	6	7	5	6	4	47
Punktzahl										

Bitte beachten Sie die folgenden Hinweise:

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- Bearbeitungen mit **Bleistift oder Rotstift** sind **nicht zulässig!**
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 2 **eigenhändig** beschriebene DIN-A4-Seiten (oder ein DIN-A4-Blatt). Insbesondere sind elektronische Hilfsmittel **nicht** erlaubt.
- Verstauen Sie Ihr **Smartphone/Handy ausgeschaltet** oder im **Flugmodus** in Ihren **Taschen.**
- Bei **allen Aufgaben** sind sämtliche **Lösungswege und Begründungen** anzugeben, sowie **Endergebnisse hervorzuheben** (z.B. durch Einrahmen, Unterstreichen). Die reine **Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht!**
- Beginnen Sie **jede Aufgabe** auf einem **neuen Blatt.**
- Der Prüfungsraum darf **endgültig** erst **nach Ablauf** der Bearbeitungszeit **verlassen** werden.
- Bitte halten Sie Ihren **Studierendenausweis** bereit!

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 .... **1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5P**

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(a) Jede Nullmenge ist abgeschlossen.

(b) Eine offene Menge $M \neq \emptyset$ kann keine Nullmenge sein.

(c) Aus $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in [0,1]$ folgt

$$\int_{[0,1]} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

(d) Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.

(e) Die Differentialgleichung $xe^y y' + e^y = 0$ ist exakt.

Aufgabe 2 .... **4P**

Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ die Menge im ersten Quadrant $(x, y > 0)$ mit $1 \leq xy \leq 2$ und $1 \leq \frac{y}{x} \leq 2$. Berechnen Sie

$$\int_B y\; d(x,y),$$

indem Sie das Integral erst auf die Koordinaten $u = xy$ und $v = \frac{y}{x}$ transformieren.

Aufgabe 3 .... **2 + 1 + 1 + 2 = 6P**

Es sei $S \subset \mathbb{R}^3$ die Fläche gegeben durch

$$S := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1, z \geq 0\right\}$$

(a) Bestimmen Sie $B \subset \mathbb{R}^2$ und $f : B \to \mathbb{R}$ derart, dass sich S als Graph der Funktion f schreiben lässt.

(b) Berechnen Sie die Flächeninhalt $\sigma(S)$.

(c) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Randkurve ∂S an.

(d) Berechnen Sie für das Vektorfeld $\vec{v}(x,y,z) = (yz, 0, xy/2)$ das Integral

$$\int_S \langle \mathrm{rot}(\vec{v}), \vec{n}\rangle \,\mathrm{d}\sigma,$$

wobei $\vec{n}$ den Einheitsnormalenvektor mit positiver z–Komponente bezeichnet.

Aufgabe 4 .... **2 + 2 = 4P**

Klassifizieren Sie folgende Differentialgleichungen (linear, nicht-linear, ...) und bestimmen Sie jeweils eine Lösung zur Anfangsbedingung

$$y(1) = 1.$$

(a) $y' = \cos(\pi x)y$,

(b) $x^2 y' = xy + y^2$,

Aufgabe 5 .... **2 + 3 + 1 = 6P**

(a) Bestimmen Sie ohne Verwendung der Laplace-Transformation ein Fundamentalsystem von Lösungen zu

$$Ly = y'' - 2y' + y = 0,$$

und bestimmen Sie die Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = 1$ und $y'(0) = 1$.

(b) Lösen Sie für Ly wie in a) das Anfangswertproblem

$$Ly = 1 - u(t-1), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

mit Hilfe der Laplace-Transformation. Dabei sei u die Heaviside-Funktion.

(c) Sei y_a die Lösung aus Teil a) und y_b die Lösung aus Teil b). Wie lautet dann die Lösung von b) mit Anfangswerten $y(0) = 3$ und $y'(0) = 3$?

Aufgabe 6 .... **1 + 1 + 2 + 1 + 2 = 7P**

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$y_1' = (a + \frac{1}{2})y_1 - \frac{1}{2}y_2 + e^{at}, \quad y_2' = \frac{1}{2}y_1 + (a - \frac{1}{2})y_2. \tag{1}$$

(a) Schreiben Sie das System in der Form $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t)$ mit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $\boldsymbol{b}(t) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Nulllösung des homogenen Systems $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ asymptotisch stabil?

(c) Berechnen Sie $(\boldsymbol{A} - a\boldsymbol{E})^2$ und $\exp(\boldsymbol{A}t)$, wobei $\boldsymbol{E}$ die Einheitsmatrix bezeichnet.

(d) Bestimmen Sie eine Fundamentalmatrix $\boldsymbol{Y}(t)$ des homogenen Systems $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$.

(e) Bestimmen Sie die Lösung der DGL (1) zu den Anfangsdaten $\boldsymbol{y}(0) = (1, 1)^T$.

Aufgabe 7 .... **2 + 2 + 1 = 5P**

(a) Für welche Werte von $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$u(x, y) = x^2 + axy + by^2$$

harmonisch?

(b) Bestimmen Sie $v(x, y)$ so, dass $u + iv$ analytisch ist als Funktion von $x + iy$.

(c) Bestimmen Sie die Funktion $z \mapsto f(z)$, welche durch $z = x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y)$ definiert wird.

Aufgabe 8 .... **2 + 2 + 2 = 6P**

Sei

$$f(z) = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z^2}.$$

(a) Bestimmen Sie die Laurentreihe von f im Ringgebiet $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z + 2| < 2\}$.

(b) Berechnen Sie $\operatorname{Res}(f, -2)$ und $\operatorname{Res}(f, 0)$.

(c) Bestimmen Sie den Wert des Integrals

$$\int_\gamma f(z)\, dz$$

für $\gamma(t) = -1 + it$, $t \in [-1, 1]$.

Aufgabe 9 .... **4P**

Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{x^4 + 1}\, dx$$

für $\omega > 0$.