Klausur zur Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Version für Betriebswirtschaftslehre (Prüfungsnummer 41991)

Allgemeine Hinweise:

- Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- In den Aufgaben 1–5 sind vollständige Lösungswege anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben ist auf gesondertem Papier vorzunehmen.
- In den Aufgaben 6–8 werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen.
- Ergebnisse müssen in der jeweils verlangten Form angegeben werden und dabei vollständig zu Ende gerechnet sein. Näherungslösungen in Dezimalbruchform werden nicht verlangt.

Hinweise für Wiederholer: Wer diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreibt und nicht besteht, ist selbst dafür verantwortlich, sich zu erkundigen, ob er eine zugehörige mündliche Nachprüfung erhält, und sich gegebenenfalls beim Prüfer anzumelden. Diese Anmeldung hat bis zum 29.04.2019 zu erfolgen.

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3^x - 3}{2x - 2}$.

Aufgabe 2 (3+4 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(1) $\displaystyle\int_1^2 x^2 \sin(\pi x^3)\,\mathrm{d}x$ (2) $\displaystyle\int_1^4 x^{-\frac{1}{2}} \ln(x)\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 3 (2+3+3 Punkte)

Sei $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R},\ (x, y, z) \to x^2 + y^2 + z^2 - 2x^2y + 4z$.

(1) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla_f(x, y, z)$ und die Hessematrix $\mathrm{H}_f(x, y, z)$ für $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

(2) Berechnen Sie alle Flachstellen von f.

(3) Welche lokalen Minimalstellen, welche lokalen Maximalstellen und welche Sattelpunkte hat f ?

Aufgabe 4 (12 Punkte) Seien

$$\begin{array}{rclcll} f & : & \mathbf{R}^4 & \to & \mathbf{R}, & (x,y,z,w) \mapsto f(x,y,z,w) := xyzw - (y-1)^2 \\ g_1 & : & \mathbf{R}^4 & \to & \mathbf{R}, & (x,y,z,w) \mapsto g_1(x,y,z,w) := xy + yz + zw - 3 \\ g_2 & : & \mathbf{R}^4 & \to & \mathbf{R}, & (x,y,z,w) \mapsto g_2(x,y,z,w) := xz + yw - 2\ . \end{array}$$

Wir schreiben $g := (g_1, g_2)$.

(1) Berechnen Sie die Gradienten $\nabla_f(x, y, z, w)$, $\nabla_{g_1}(x, y, z, w)$ und $\nabla_{g_2}(x, y, z, w)$ für $(x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4$.

(2) Sei $P := (1, 1, 1, 1)$. Ist P eine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$? Falls ja, dann entscheide man, ob P eine lokale Maximalstelle oder eine lokale Minimalstelle unter der Nebenbedingung $g = 0$ ist.

(3) Sei $Q := (2, 0, 1, 3)$. Ist Q eine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$? Falls ja, dann entscheide man, ob Q eine lokale Maximalstelle oder eine lokale Minimalstelle unter der Nebenbedingung $g = 0$ ist.

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Sei bei einem Sparvertrag jährliche Verzinsung vereinbart, zu einem Zinsfaktor $q > 1$. Sei für die jährlich einzuzahlende Rate R nachschüssige Zahlung vereinbart.
Sei das Anfangskapital $K_0 = 10000$ Euro.

(1) Wie hoch sollte die jährlich einzuzahlende Rate R sein, um nach 5 Jahren ein Kapital von $K_5 = 20000$ Euro angespart zu haben? Die Rate R hängt dabei noch von q ab.

(2) Bei welchem Zinsfaktor q ergibt sich in (1) die Rate $R = 0$?

Name, Vorname, Matrikelnummer:	

Aufgabe 6 (3+1+1 Punkte) Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sei U der Unterraum von $\mathbf{R}^5$, der von den Spalten von A aufgespannt wird, also

$$U := \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(1) Formen Sie A in Zeilenstufenform um.

Zeilenstufenform von A:

(2) Geben Sie eine Basis von U an.

Basis von U:

(3) Geben Sie die Dimension von U an.

$\dim(U) =$

Aufgabe 7 (1+1 Punkte) Berechnen Sie folgende Reihengrenzwerte.

(1) $$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^k = \boxed{}$$

(2) $$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^k = \boxed{}$$

Aufgabe 8 (1+1 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Determinanten.

(1) $$\det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{}$$

(2) $$\det \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \boxed{}$$