Universität Stutgart

Prof. Dr. Guido Schneider
Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Klausur

für Studierende der Fachrichtungen
el, kyb, mecha, phys, tpel

Bitte unbedingt beachten:

- Bitte beschriften Sie jeden Ihrer Zettel mit Namen und Matrikelnummer.
- Legen Sie Ihren Studentenausweis gut sichtbar vor sich auf den Tisch.
- Verwenden Sie **keinen Bleistift oder Rotstift.**
- **Taschenrechner, Mobiltelefone etc. sind nicht zugelassen.**
- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **180 Minuten**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** Keine, insbesondere keine Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengeräte.
- Bei den **Aufgaben 2, 5, 7c, 8, 9, 10d, 11 und 12** sind die vollständigen Argumentationsschritte anzugeben. Bei den **Aufgaben 1, 3, 4, 6, 7ab und 10abc** wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt, Nebenrechnungen werden hier nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- In dieser Klausur können bis zu **60 Punkte** erreicht werden.
- Nach der Klausur legen Sie bitte Ihre beschriebenen Blätter in den gefalteten Umschlagbogen hinein.
- Wann die Prüfungsergebnisse vorliegen, wird auf der Homepage der Vorlesung bekanntgegeben. Mit 24 und mehr Punkten ist die Klausur auf jeden Fall bestanden.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$16z^4 = 1.$$

Geben Sie die Lösungen sowohl in der Form $z = re^{i\varphi}$ mit $r \in [0, \infty), \varphi \in [0, 2\pi)$ als auch in der Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an:

$z_1 = \boxed{}\, e^{i\boxed{}} = \boxed{} + \boxed{}\, i,$ $\qquad z_2 = \boxed{}\, e^{i\boxed{}} = \boxed{} + \boxed{}\, i,$

$z_3 = \boxed{}\, e^{i\boxed{}} = \boxed{} + \boxed{}\, i,$ $\qquad z_4 = \boxed{}\, e^{i\boxed{}} = \boxed{} + \boxed{}\, i.$

Aufgabe 2 (*2+2+1 Punkte*) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' - y' - 6y = 0.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung.

b) Bestimmen Sie eine Lösung $y(t)$ der Differentialgleichung mit $y'(0) = 1$ und $y(0) = 0$.

c) Bestimmen Sie alle Lösungen $y(t)$ mit $\lim_{t \to \infty} y(t) = 0$.

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Aufgabe 3 (*1+1+1 Punkte*) Gegeben sei die reelle Matrix:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 6 \\ 0 & 3\alpha - 4 & 0 \\ \alpha & -2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix A_α in Abhängigkeit von α:

$\det(A_\alpha) = \boxed{}$

b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist A_α invertierbar?

$\alpha \in \boxed{}$

c) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\operatorname{Rang}(A_\alpha) = 2$?

$\alpha \in \boxed{}$

Aufgabe 4 (*1+3+2 Punkte*) Gegeben sei die reelle Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ von A an:

$$\chi_A(\lambda) = \boxed{}$$

b) Geben Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der Matrix A und jeweils einen zugehörigen Eigenvektor v_1, v_2, v_3 an:

$$\lambda_1 = \boxed{} \qquad \lambda_2 = \boxed{} \qquad \lambda_3 = \boxed{}$$

$$v_1 = \boxed{} \qquad v_2 = \boxed{} \qquad v_3 = \boxed{}$$

c) Sei $b = (3, 4, 6)^\top$. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des LGS $Ax = b$:

$$x = \boxed{} + \mu \cdot \boxed{}, \qquad \mu \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 5 (*2+2+2 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{a) } \lim_{x \to 0} e^{\frac{\sin(x)}{x}} \qquad \text{b) } \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^3)}{x^2 - x^9} \qquad \text{c) } \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^{3x} \sqrt{\cos(t)}dt}{\sin(3x)}$$

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Aufgabe 6 (*1+1 Punkte*) Bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen der Umkehrfunktion von

$$y = f(x) = x^2 + 5x - 6$$

im Punkt $(x, y) = (1, 0)$.

$$(f^{-1})'(0) = \boxed{} \qquad (f^{-1})''(0) = \boxed{}$$

Aufgabe 7 (*1+2+4 Punkte*) Gegeben sei die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}\, x^n.$$

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe $f(x)$:

$R =$ $\boxed{}$

b) Bestimmen Sie die Funktionswerte:

$f(0) =$ $\boxed{}$ $f'(0) =$ $\boxed{}$ $f''(0) =$ $\boxed{}$

c) Konvergiert die Potenzreihe in den Randpunkten $x = R$ und $x = -R$? Begründen Sie Ihre Entscheidung. **Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.**

Aufgabe 8 (*2+2+1+2 Punkte*)

a) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{\sin(\pi \ln(x))}{x}$.

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 x e^x \mathrm{d}x.$$

c) Geben Sie die Partialbruchzerlegung des folgenden rationalen Ausdrucks an:

$$\frac{1}{x^2 - x - 6}.$$

d) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 - x - 6} \mathrm{d}x.$$

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Aufgabe 9 (*2+2 Punkte*) Gegeben seien das Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und die Kurve $c\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}, \qquad c(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie das Wegintegral zweiter Art

$$\int_c \langle f(X), \mathrm{d}X \rangle.$$

b) Begründen Sie wieso Wegintegrale zum Vektorfeld f im allgemeinen nicht wegunabhängig sind.

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Aufgabe 10 (*1+2+2+3 Punkte*) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = 2019 + e^{x^2+xy+y^2}.$$

a) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von f im Punkt $(0,0)$.

$H_f(0,0) =$

b) Bestimmen Sie für den stationären Punkt $(0,0)$ von f, ob f dort ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder einen Sattelpunkt besitzt. Geben Sie eine mathematische Begründung für Ihre Entscheidung.

Die Funktion f besitzt ein(en) in $(0,0)$.

Mathematische Begründung:

c) Geben Sie für f das Taylorpolynom der dritten Stufe um den Entwicklungspunkt $(0,0)$ an.

$T_3(f,(x,y),(0,0)) =$

d) Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = f(x,x)$. Bestimmen Sie alle Nullstellen und Extremstellen von g und skizzieren Sie g.

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Aufgabe 11 (*4 Punkte*) Gegeben seien die Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = x^3 + y^2 x, \qquad g(x,y) = x^2 + y^2.$$

Bestimmen Sie den maximalen und minimalen Wert der Funktion f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 1$. **Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.**

Aufgabe 12 (*2+2 Punkte*) Gegeben seien die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Normieren Sie die Vektoren u and v und ergänzen Sie sie durch einen Vektor w zu einer Orthonormalbasis $\{\frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|}, w\}$ des $\mathbb{R}^3$.

b) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $P = (5, 0, 0)$ zur Ebene $E = \{x = \mu u + \nu v : \mu, \nu \in \mathbb{R}\}$.

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.