Universität Stuttgart

Prof. Dr. Guido Schneider
Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Klausur

für Studierende der Fachrichtungen
el, kyb, mecha, phys, tpel

Bitte unbedingt beachten:

- Bitte beschriften Sie jeden Ihrer Zettel mit Namen und Matrikelnummer.
- Legen Sie Ihren Studentenausweis gut sichtbar vor sich auf den Tisch.
- Verwenden Sie **keinen Bleistift oder Rotstift.**
- **Taschenrechner, Mobiltelefone etc. sind nicht zugelassen.**
- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **180 Minuten**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** Keine, insbesondere keine Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengeräte.
- Bei den **Aufgaben 2, 5, 7c, 8, 9, 10d, 11 und 12** sind die vollständigen Argumentationsschritte anzugeben. Bei den **Aufgaben 1, 3, 4, 6, 7ab und 10abc** wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt, Nebenrechnungen werden hier nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- In dieser Klausur können bis zu **60 Punkte** erreicht werden.
- Nach der Klausur legen Sie bitte Ihre beschriebenen Blätter in den gefalteten Umschlagbogen hinein.
- Wann die Prüfungsergebnisse vorliegen, wird auf der Homepage der Vorlesung bekanntgegeben. Mit 24 und mehr Punkten ist die Klausur auf jeden Fall bestanden.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$16z^4 = 1.$$

Geben Sie die Lösungen sowohl in der Form $z = re^{i\varphi}$ mit $r \in [0, \infty), \varphi \in [0, 2\pi)$ als auch in der Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an:

$$z_1 = \boxed{\tfrac{1}{2}}\, e^{i\,\boxed{0}} = \boxed{\tfrac{1}{2}} + \boxed{0}\, i, \qquad z_2 = \boxed{\tfrac{1}{2}}\, e^{i\,\boxed{\frac{\pi}{2}}} = \boxed{0} + \boxed{\tfrac{1}{2}}\, i,$$

$$z_3 = \boxed{\tfrac{1}{2}}\, e^{i\,\boxed{\pi}} = \boxed{-\tfrac{1}{2}} + \boxed{0}\, i, \qquad z_4 = \boxed{\tfrac{1}{2}}\, e^{i\,\boxed{\frac{3\pi}{2}}} = \boxed{0} + \boxed{-\tfrac{1}{2}}\, i.$$

Aufgabe 2 (*2+2+1 Punkte*) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' - y' - 6y = 0.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung.

b) Bestimmen Sie eine Lösung $y(t)$ der Differentialgleichung mit $y'(0) = 1$ und $y(0) = 0$.

c) Bestimmen Sie alle Lösungen $y(t)$ mit $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$.

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Lösung:

a)
- Das charakteristische Polynom $p(r) = r^2 - r - 6$ besitzt die Nullstellen $r = -2$ und $r = 3$.
- Damit is die allgemeine reelle Lösung $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{3t}$ mit $c_{1,2} \in \mathbb{R}$.

b) Sei $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{3t}$ mit $c_{1,2} \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung mit Nebenbedingungen $y'(0) = 1$ und $y(0) = 0$.
- Die Nebenbedingungen ergeben ein LGS für c_1, c_2 gegeben durch $c_1 + c_2 = y(0) = 0$ und $-2c_1 + 3c_2 = y'(0) = 1$.
- Lösen des LGS liefert $c_1 = -\frac{1}{5}$ und $c_2 = \frac{1}{5}$. Damit ist $y(t) = \frac{1}{5}\left(e^{3t} - e^{-2t}\right)$ die gefragte Lösung.

c) Sei $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{3t}$ mit $c_{1,2} \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung. Es gilt $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ genau wenn $c_2 = 0$. Damit sind alle Lösungen $y(t)$ mit $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$ gegeben durch $y(t) = c_1 e^{-2t}$ mit $c_1 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (*1+1+1 Punkte*) Gegeben sei die reelle Matrix:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 6 \\ 0 & 3\alpha - 4 & 0 \\ \alpha & -2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix A_α in Abhängigkeit von α:

$$\det(A_\alpha) = \boxed{-2(3\alpha-4)^2 \text{ or } -32 + 48\alpha - 18\alpha^2}$$

b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist A_α invertierbar?

$$\alpha \in \boxed{\mathbb{R} \setminus \{\tfrac{4}{3}\}}$$

c) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\operatorname{Rang}(A_\alpha) = 2$?

$$\alpha \in \boxed{\{\tfrac{4}{3}\}}$$

Aufgabe 4 (*1+3+2 Punkte*) Gegeben sei die reelle Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ von A an:

$$\chi_A(\lambda) = \boxed{-\lambda(2-\lambda)(3-\lambda) \text{ or } -6\lambda + 5\lambda^2 - \lambda^3}$$

b) Geben Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der Matrix A und jeweils einen zugehörigen Eigenvektor v_1, v_2, v_3 an:

$$\lambda_1 = \boxed{0} \qquad \lambda_2 = \boxed{2} \qquad \lambda_3 = \boxed{3}$$

$$v_1 = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad v_2 = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad v_3 = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

c) Sei $b = (3, 4, 6)^\top$. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des LGS $Ax = b$:

$$x = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}} + \mu \cdot \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \qquad \mu \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 5 (*2+2+2 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0} e^{\frac{\sin(x)}{x}} \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3)}{x^2 - x^9} \qquad \text{c)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{3x} \sqrt{\cos(t)}dt}{\sin(3x)}$$

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Lösung: Wir berechnen mithilfe der Regel von l'Hospital und des Fundamentalsatzes der Integralrechnung:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0} e^{\frac{\sin(x)}{x}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}} = e^{\lim_{x\to 0} \cos(x)} = e$$

$$\text{b)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3)}{x^2 - x^9} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2\cos(x^3)}{2x - 9x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{3x\cos(x^3)}{2 - 9x^7} = 0$$

$$\text{c)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{3x} \sqrt{\cos(t)}dt}{\sin(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{3\sqrt{\cos(3x)}}{3\cos(3x)} = 1$$

Aufgabe 6 (*1+1 Punkte*) Bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen der Umkehrfunktion von

$$y = f(x) = x^2 + 5x - 6$$

im Punkt $(x, y) = (1, 0)$.

$(f^{-1})'(0) = \boxed{\frac{1}{7}}$ $\qquad (f^{-1})''(0) = \boxed{-\frac{2}{7^3} = -\frac{2}{343}}$

Aufgabe 7 (*1+2+4 Punkte*) Gegeben sei die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}\, x^n.$$

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe $f(x)$:

$R = \boxed{1}$

b) Bestimmen Sie die Funktionswerte:

$f(0) = \boxed{0}$ $\qquad f'(0) = \boxed{0}$ $\qquad f''(0) = \boxed{\frac{2}{\ln(2)}}$

c) Konvergiert die Potenzreihe in den Randpunkten $x = R$ und $x = -R$? Begründen Sie Ihre Entscheidung. **Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.**

Lösung: Es gilt

$$0 < \ln(n) \leqq n \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{n} \geqq \frac{1}{\ln(n)},$$

für alle $n \in \mathbb{N}_{\geqq 2}$. Die harmonische Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n},$$

divergiert. Also divergiert

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)},$$

nach dem Minoranten-Kriterium. Also, die Potenzreihe konvergiert am $x = 1$ nicht.

Es gilt

$$0 < \frac{1}{\ln(n+1)} < \frac{1}{\ln(n)},$$

für alle $n \in \mathbb{N}_{\geqq 2}$. Damit ist die Folge $\left(\frac{(-1)^n}{\ln(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}_{\geqq 2}}$ alternierend und die Folge $\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}_{\geqq 2}}$ monoton fallend. Es gilt außerdem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0.$$

Also konvergiert die Potenzreihe am $x = -1$ nach dem Leibniz-Kriterium.

Aufgabe 8 (*2+2+1+2 Punkte*)

a) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{\sin(\pi \ln(x))}{x}$.

Lösung: Sei $u = \ln(x)$. Nach der Substitutionsregel gilt:

$$\int \frac{\sin(\pi \ln(x))}{x} dx = \int \sin(\pi u) du \qquad = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi u) + C \qquad = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi \ln(x)) + C,$$

mit $C \in \mathbb{R}$.

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 xe^x \mathrm{d}x.$$

Lösung: Durch partielle Integration ergibt sich:

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \qquad = [xe^x - e^x]_0^1 \qquad = 1$$

c) Geben Sie die Partialbruchzerlegung des folgenden rationalen Ausdrucks an:

$$\frac{1}{x^2 - x - 6}.$$

Lösung: Es gilt $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$. Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung lautet

$$\frac{1}{x^2 - x - 6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2},$$

mit $A, B \in \mathbb{R}$. Daher muss $A(x+2) + B(x-3) = 1$ gelten. Einsetzen von $x = -2$ und $x = 3$ liefert $A = \frac{1}{5}$ und $B = -\frac{1}{5}$. Die gefragte Partialbruchzerlegung ist

$$\frac{1}{x^2 - x - 6} = \frac{1}{5(x-3)} - \frac{1}{5(x+2)}.$$

d) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 - x - 6} \mathrm{d}x.$$

Lösung: Unter verwendung von Teilaufgabe c berechnen wir

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 - x - 6} \mathrm{d}x = \frac{1}{5} \int_0^1 \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \left[\frac{1}{5} \left(\ln|x-3| - \ln|x+2| \right) \right]_0^1$$
$$= \frac{1}{5} \left(\ln(2) - \ln(3) - \ln(3) + \ln(2) \right) = \frac{2}{5} \ln\left(\frac{2}{3} \right)$$

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Aufgabe 9 (*2+2 Punkte*) Gegeben seien das Vektorfeld $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und die Kurve $c \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}, \qquad c(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie das Wegintegral zweiter Art

$$\int_c \langle f(X), \mathrm{d}X \rangle.$$

Lösung: Wir berechnen

$$\int_c \langle f(X), \mathrm{d}X \rangle = \int_0^{2\pi} \langle f(c(t)), \dot{c}(t) \rangle dt = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt$$
$$= -\int_0^{2\pi} \left(\sin^2(t) + \cos^2(t) \right) dt = -\int_0^{2\pi} dt = -2\pi.$$

b) Begründen Sie wieso Wegintegrale zum Vektorfeld f im allgemeinen nicht wegunabhängig sind.

Lösung: Es ist $\operatorname{rot}(f) = \frac{\partial}{\partial x}(-x) - \frac{\partial}{\partial y} y = -2 \neq 0$ und somit ist f kein Gradientenfeld und sind Wegintegrale zum Vektorfeld f im allgemeinen nicht wegunabhängig.

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Aufgabe 10 (*1+2+2+3 Punkte*) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = 2019 + e^{x^2+xy+y^2}.$$

a) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von f im Punkt $(0,0)$.

$$H_f(0,0) = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

b) Bestimmen Sie für den stationären Punkt $(0,0)$ von f, ob f dort ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder einen Sattelpunkt besitzt. Geben Sie eine mathematische Begründung für Ihre Entscheidung.

Die Funktion f besitzt ein(en) **lokales Minimum** in $(0,0)$.

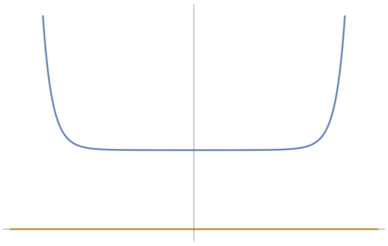
Mathematische Begründung: Wir berechnen $\det(H_f(0,0)) = 3 > 0$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 > 0$. Nach dem Hurwitz-Kriterium besitzt f ein lokales Minimum in $(0,0)$.

c) Geben Sie für f das Taylorpolynom der dritten Stufe um den Entwicklungspunkt $(0,0)$ an.

$$T_3(f,(x,y),(0,0)) = \boxed{2020 + x^2 + xy + y^2}$$

d) Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = f(x,x)$. Bestimmen Sie alle Nullstellen und Extremstellen von g und skizzieren Sie g.

Lösung:

- Es gilt $g(x) = 2019 + e^{3x^2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit hat g keine Nullstellen.
- Wir berechnen $g'(x) = 6xe^{3x^2}$. Da gilt $6e^{3x^2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, folgt $g'(x) \neq 0$ für $x \neq 0$. Außerdem gilt $g'(0) = 0$. Also, $x = 0$ ist die einzige mögliche Extremstelle von g. Wegen Teilaufgabe b) hat $g(x)$ hat ein Minimum auf $x = 0$.
- Skizze: 

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Aufgabe 11 (*4 Punkte*) Gegeben seien die Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = x^3 + y^2 x, \qquad g(x,y) = x^2 + y^2.$$

Bestimmen Sie den maximalen und minimalen Wert der Funktion f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 1$. **Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.**

Lösung:

- Es ist $g'(x,y) = (2x, 2y)$. Also gilt $\mathrm{Rang}(g'(x,y)) \neq 1$ genau dann, wenn $x = y = 0$. Wegen $g(0,0) \neq 1$ ist $\mathrm{Rang}(g'(x,y)) = 1$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $g(x,y) = 1$. Somit können alle Punkte, in denen f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 1$ ein Extremum annimmt, mit Hilfe des Lagrange-Ansatzes ermittelt werden.
- Das bedeutet, die Extremstellen sind unter den Lösungen der Gleichungen

  $$\begin{aligned} \nabla f(x,y) + \lambda \nabla g(x,y) &= 0, \\ g(x,y) &= 1. \end{aligned}$$

  Dies ergibt die Bedingungen

  $$\begin{aligned} 3x^2 + y^2 + 2\lambda x &= 0, && (1) \\ 2xy + 2\lambda y &= 0, && (2) \\ x^2 + y^2 &= 1. && (3) \end{aligned}$$

- Aus (2) folgt $y = 0$ oder $\lambda = -x$. Gilt $y = 0$, dann folgt $x = \pm 1$ aus (3) und deswegen $\lambda = \mp \frac{3}{2}$ aus (1). Gilt $x = -\lambda$, dann liefert einsetzen von (3) in (1): $0 = 3x^2 + 1 - x^2 - 2x^2 = 1$, was keine Lösung ergibt. Also, die Extremstellen von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 1$ sind $(\pm 1, 0)$.
- Einsetzen der Extremstellen in f ergibt $f(\pm 1, 0) = \pm 1$. Also, der maximalen und minimalen Wert der Funktion f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 1$ sind jeweils 1 und -1.

Aufgabe 12 (*2+2 Punkte*) Gegeben seien die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Normieren Sie die Vektoren u and v und ergänzen Sie sie durch einen Vektor w zu einer Orthonormalbasis $\{\frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|}, w\}$ des $\mathbb{R}^3$.

Lösung: Wir normieren die orthogonalen Vektoren u und v:

$$\tilde{u} = \frac{u}{\|u\|} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{v} = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ein Vektor $\tilde{w}$, die senkrecht auf u and v steht, ist gegeben durch das Kreuzprodukt $\tilde{w} = u \times v = 9\,(\,4 \quad 7 \quad -4\,)^\top$. Normieren von $\tilde{w}$ ergibt

$$w = \frac{\tilde{w}}{\|\tilde{w}\|} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $P = (5, 0, 0)$ zur Ebene $E = \{x = \mu u + \nu v : \mu, \nu \in \mathbb{R}\}$.

Lösung: Der Abstand von P zur Ebene E ist gegeben durch das Skalarprodukt $|\langle w, P\rangle| = \frac{20}{9}$.

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.