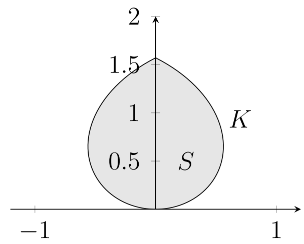
Aufgabe 1 (*10 Punkte*)

Es seien ein Gebiet $S \subsetneq \mathbb{R}^2$ mit Parametrisierung $\Phi : [0,1] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$ und ein Vektorfeld $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch



$$\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\varphi\cos\varphi \\ r\varphi\sin\varphi \end{pmatrix}, \qquad g(x,y) = \begin{pmatrix} -12y \\ 12x \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $\operatorname{rot} g$ und $\operatorname{div} g$.

(b) Geben Sie eine Parametrisierung des Randes $K = \partial S$ an.

(c) Berechnen Sie die Zirkulation $Z(g,K)$.

(d) Berechnen Sie den Flächeninhalt von S.

Lösung

(a) $\operatorname{rot} g = \partial_1 g_2 - \partial_2 g_1 = 12 - (-12) = 24$

$\operatorname{div} g = \partial_1 g_1 + \partial_1 g_1 = 0 + 0 = 0$

(b) Man beobachtet, dass $\Phi(0,\varphi) = 0$ ein Punkt auf dem Rand und $\Phi(r, -\frac{\pi}{2}) = \Phi(r, \frac{\pi}{2})$ für $r \in [0,1]$ eine Strecke im Inneren von S beschreiben, also nicht zum Rand von S beitragen. Damit ergibt sich eine Parametrisierung des Randes alleine durch Festhalten von $r = 1$:

$$\gamma : [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$$
$$\varphi \mapsto \begin{pmatrix} \varphi\cos\varphi \\ \varphi\sin\varphi \end{pmatrix}$$

(c) Direkt ausrechnen mit der Parametrisierung aus (b):

$$Z(g,K) = \int_K g \cdot \mathrm{d}s = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(\gamma(\varphi)) \cdot \gamma'(\varphi) \qquad\qquad \gamma'(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi - \varphi\sin\varphi \\ \sin\varphi + \varphi\cos\varphi \end{pmatrix}$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} -12\varphi\sin\varphi \\ 12\varphi\cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi - \varphi\sin\varphi \\ \sin\varphi + \varphi\cos\varphi \end{pmatrix} \mathrm{d}t$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 12\varphi^2 \,\mathrm{d}\varphi = 12\left[\tfrac{1}{3}\varphi^3\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi^3$$

(d) Mit dem Satz von Green und der Zirkulation $Z(g,K) = \pi^3$ aus (c):

$$F(S) = \int_S \mathrm{d}x = \frac{1}{24}\int_S \operatorname{rot} g \,\mathrm{d}x = \frac{1}{24} Z(g,K) = \frac{\pi^3}{24}$$

Aufgabe 2 (*5 Punkte*) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' + \frac{1}{x}y = 6e^{x^2}, y(1) = 0, x > 0.$$

Es handelt sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung. Wir bestimmen zunächst die Lösung der homogenen Differentialgleichung.

Mit $g(x) = \frac{1}{x}$ erhalten wir $G(x) = \ln x$ und

$$y_h = ce^{-G(x)} = ce^{-\ln x} = \frac{c}{x},\ c \in \mathbb{R}$$

als allgemeine Lösung der homogenen Gleichung.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung erhalten wir durch Variation der Konstanten durch den Ansatz

$$y_p = c(x)e^{-G(x)}$$

Dies führt auf

$$c'(x) = 6e^{x^2}e^{G(x)} = 6xe^{x^2}$$

und damit

$$c(x) = \int 6xe^{x^2} = 3e^{x^2}.$$

Also gilt

$$y_p = c(x)e^{-G(x)} = \frac{3}{x}e^{x^2}$$

und

$$y = y_p + y_h = \frac{c}{x} + \frac{3}{x}e^{x^2}$$

Für die Lösung des Anfangswertproblems setzen wir

$$0 = y(1) = \frac{c}{1} + \frac{3}{1}e^{1^2} = c + 3e$$

Damit erhalten wir die Lösung

$$y = \frac{-3e}{x} + \frac{3}{x}e^{x^2}.$$

Aufgabe 3 (*9 Punkte*) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y^{(4)} - y = e^{-x} + e^{x} \ .$$

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung.

SCHRITT 1:(3 Punkte) In einem ersten Schritt löst man die homogene Gleichung $y^{(4)} - y = 0$. Das charakteristische Polynom $P(X)$ dieser Differentialgleichung ist $P(X) = X^4 - 1$. Zwei offensichtliche Nullstellen von P sind 1 und -1.

$$P(X) = X^4 - 1 = (X^2 - 1)(X^2 + 1)$$

und hat die übrigen Nullstelle $\pm i$.
Die allgemeine homogene Lösung f_h ist dann:

$$f_h(x) = ae^x + be^{-x} + c\sin(x) + d\cos(x)$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

SCHRITT 2:(5 Punkte) In einem zweiten Schritt bestimmt man nun irgendeine beliebige (partikuläre) Lösung der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung durch einen Ansatz nach Art der rechten Seite.

Partikuläre Lösung durch Ansatz nach Art der rechten Seite
Aufgrund des Superpositionsprinzips bekommt man eine partikuläre Lösung f_p von $y^{(4)} - y = e^x + e^{-x}$, indem man eine partikuläre Lösung f_{p_1} von $y^{(4)} - y = e^x$ und eine partikuläre Lösung f_{p_2} von $y^{(4)} - y = e^{-x}$ bestimmt und diese beiden addiert: $f_p = f_{p_1} + f_{p_2}$.

- Zunächst zu $y^{(4)} - y = e^x$:
  Weil 1 eine einfache Nullstelle von P ist (Resonanz), machen wir den Ansatz

  $$f_{p_1}(x) = \alpha x\, e^x.$$

  Viermaliges Ableiten ergibt

  $$\begin{aligned} f'_{p_1}(x) &= \alpha e^x + \alpha x e^x, \\ f^{(2)}_{p_1}(x) &= 2\alpha e^x + \alpha x e^x, \\ f^{(3)}_{p_1}(x) &= 3\alpha e^x + \alpha x e^x, \\ f^{(4)}_{p_1}(x) &= 4\alpha e^x + \alpha x e^x. \end{aligned}$$

Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$4\alpha e^x = e^x$$

und damit $\alpha = 1/4$. Also

$$f_{p_1}(x) = \frac{1}{4} x e^x.$$

- Jetzt zu $y^{(4)} - y = e^{-x}$:
  Weil -1 eine einfache Nullstelle von P ist (Resonanz), machen wir den Ansatz

  $$f_{p_2}(x) = \alpha x\, e^{-x}.$$

  Viermaliges Ableiten ergibt

  $$\begin{aligned} f'_{p_2}(x) &= \alpha e^{-x} - \alpha x e^{-x}, \\ f^{(2)}_{p_2}(x) &= -2\alpha e^{-x} + \alpha x e^{-x}, \\ f^{(3)}_{p_2}(x) &= 3\alpha e^{-x} - \alpha x e^{-x}, \\ f^{(4)}_{p_2}(x) &= -4\alpha e^{-x} + \alpha x e^{-x}. \end{aligned}$$

  Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so erhält man

  $$-4\alpha e^{-x} = e^{-x}$$

  und damit $\alpha = -1/4$. Also

  $$f_{p_2}(x) = -\frac{1}{4} x e^{-x}.$$

Insgesamt erhalten wir $f_p(x) = f_{p_1}(x) + f_{p_2}(x) = \frac{1}{4} x e^x - \frac{1}{4} x e^{-x}$.

Alternative:(5 Punkte) Da $e^x + e^{-x}$ beide einfache Resonanz haben und $e^x + e^{-x} = 2\cosh(x)$, folgender Ansatz

$$f_p = \alpha x \cosh(x) + \beta x \sinh(x).$$

Viermaliges Ableiten ergibt

$$\begin{aligned} f'_p(x) &= (\alpha + \beta x)\cosh(x) + (\beta + \alpha x)\sinh(x), \\ f^{(2)}_p(x) &= (2\beta + \alpha x)\cosh(x) + (2\alpha x + \beta x)\sinh(x), \\ f^{(3)}_p(x) &= (3\alpha + \beta x)\cosh(x) + (3\beta + \alpha x)\sinh(x), \\ f^{(4)}_p(x) &= (4\beta + \alpha x)\cosh(x) + (4\alpha + \beta x)\sinh(x). \end{aligned}$$

Einsetzen in die Gleichung liefert

$$4\beta \cosh(x) + 4\alpha \sinh(x) = 2\cosh(x).$$

Also folgt $\beta = 1/2$ und $\alpha = 0$. Wir erhalten wieder $f_p = \frac{1}{2} x \sinh(x) = \frac{1}{4} x (e^x - e^{-x})$.

SCHRITT 3:(1 Punkt) In einem dritten und letzten Schritt muss man schließlich noch die oben bestimmte allgemeine homogene Lösung und die oben bestimmte partikuläre Lösung addieren:

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = ae^x + be^{-x} + c\sin(x) + d\cos(x) + \frac{1}{4}xe^x - \frac{1}{4}xe^{-x}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (*6 Punkte*) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$y' = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} y.$$

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von A ist gegeben durch

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + 9\,.$$

Die Nullstellen dieses Polynoms und damit die Eigenwerte von A sind folglich

$$\lambda_{1/2} = \pm 3\mathrm{i}\,.$$

Das Fundamentalsystem der zugehörigen skalaren Differentialgleichung $y'' + 9y = 0$ wird folglich von den Funktionen $\cos 3x$ und $\sin 3x$ gebildet. Für die zugehörige Wronski-Matrix bedeutet dies

$$M(x) = \begin{pmatrix} \cos 3x & \sin 3x \\ -3\sin 3x & 3\cos 3x \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und folglich} \quad M(0)^{-\top} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung zum Anfangswert

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist somit gegeben durch

$$\begin{aligned} f_1 &= \left(v_1 \,\middle|\, Av_1\right) M(0)^{-\top} \begin{pmatrix} \cos 3x \\ \sin 3x \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 3x \\ \sin 3x \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 3x \\ \sin 3x \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3\cos 3x + 4\sin 3x \\ -5\sin 3x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Analog ist die Lösung zum Anfangswert

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben durch

$$\begin{aligned} f_2 &= \left(v_2 \,\middle|\, Av_2\right) M(0)^{-\top} \begin{pmatrix} \cos 3x \\ \sin 3x \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 3x \\ \sin 3x \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 3x \\ \sin 3x \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 \sin 3x \\ 3 \cos 3x - 4 \sin 3x \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die allgemeine homogene Lösung als

$$y_{\mathrm{h}}(x) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \cos 3x + 4 \sin 3x \\ -5 \sin 3x \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \sin 3x \\ 3 \cos 3x - 4 \sin 3x \end{pmatrix} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \, .$$

Aufgabe 5 (*10 Punkte*) Gegeben ist die 2π-periodische Funktion f mit

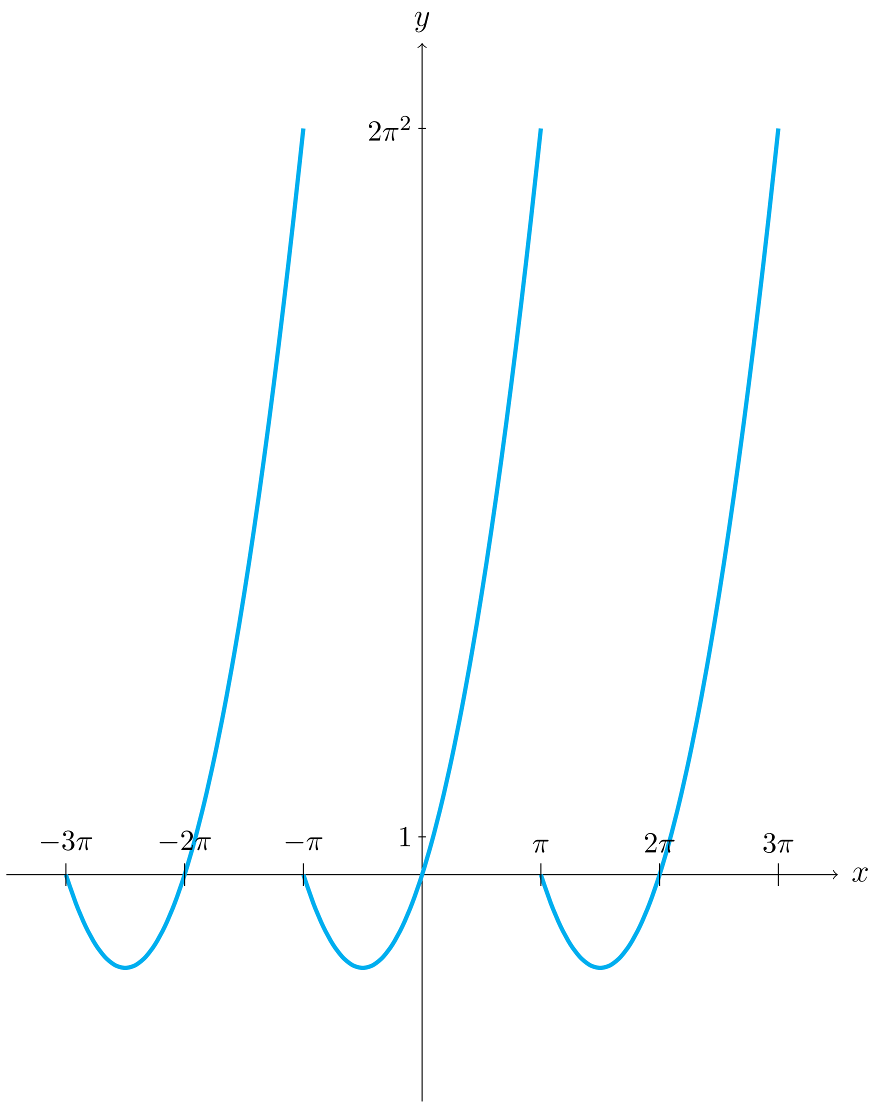
$$f(x) := \; x(x+\pi) \quad \text{für} \quad x \in [-\pi, \pi).$$

(a) (*2 Punkte*) Skizzieren Sie f auf dem Intervall $(-3\pi, 3\pi)$.

(b) (*6 Punkte*) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von f.

(c) (*2 Punkte*) Bestimmen Sie für alle $x \in [-2\pi, 2\pi]$ den Grenzwert der Fourierreihe.

(a) Skizze:



(b) (1) $f(x) = x^2 + \pi x$. Weil x^2 gerade ist und πx ungerade ist, gilt

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx),$$

mit

$$x^2 \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

und

$$\pi x \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

(2) Der Koeffizient a_0 für x^2 folgt durch Integration:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

(3) Die Koeffizienten $a_n, n > 0$, für x^2 folgen durch Integration:

$$\begin{aligned}
a_n =& \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx \\
=& \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx \\
=& \frac{2}{\pi} [\frac{x^2 \sin(nx)}{n}]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{2x \sin(nx)}{n} dx \\
=& -\frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{2x \sin(nx)}{n} dx \\
=& -\frac{4}{\pi n} \int_{0}^{\pi} x \sin(nx) dx \\
=& -\frac{4}{\pi n} \left([-\frac{x}{n} \cos(nx)]_0^{\pi} + \int_{0}^{\pi} \frac{1}{n} \cos(nx) dx \right) \\
=& -\frac{4}{\pi n} \left([-\frac{x}{n} \cos(nx)]_0^{\pi} + [\frac{1}{n^2} \sin(nx)]_0^{\pi} \right) \\
=& \frac{4(-1)^n}{n^2}.
\end{aligned}$$

(4) Die Koeffizienten b_n für πx folgen durch Integration:

$$\begin{aligned}
b_n =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \pi x \sin(nx)dx \\
=& \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \pi x \sin(nx)dx \\
=& 2\int_{0}^{\pi} x \sin(nx)dx \\
=& 2\left([-\frac{x}{n}\cos(nx)]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{1}{n}\cos(nx)dx \right) \\
=& 2\left([-\frac{x}{n}\cos(nx)]_0^\pi + [\frac{1}{n^2}\sin(nx)]_0^\pi \right) \\
=& \frac{2(-1)^{n+1}\pi}{n}.
\end{aligned}$$

(5) Die Fourierreihe von f ist

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}\pi}{n}\sin(nx).$$

(c) Die Funktion f ist stetig differenzierbar in den Intervallen $((2n-1)\pi, (2n+1)\pi)$ $(n \in \mathbb{Z})$ mit endlichen links- bzw. rechtseitigen Grenzwerten sowohl für f als auch f' in allen Punkten $\{(2n-1)\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Da die Funktion f insbesondere stetig ist in $((2n-1)\pi, (2n+1)\pi)$ $(n \in \mathbb{Z})$, konvergiert die Fourierreihe in diesem Bereich also gegen $f(x)$.

In den Punkten $x_0 \in \{-\pi, \pi\}$ hingegen macht f einen Sprung der Höhe $2\pi^2$, sodass sich der Grenzwert dort berechnet als

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_0+0} f(x) + \lim_{x\to x_0-0} f(x) \right) = \frac{1}{2}(0 + 2\pi^2) = \pi^2.$$