IMNG, Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Prof. Dr. K. Höllig

Höhere Mathematik I–II **Diplomvorprüfung** **2. 9. 2003**

2. Klausur

für Studierende der Fachrichtungen **el**, **geod**, **kyb**, **tpel**

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt 120 Minuten. Verlangt und gewertet werden **alle sieben Aufgaben**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 25 handbeschriebene Blätter sowie Zeichenmaterial. Nicht erlaubt sind insbesondere Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengeräte.
- Bei den **Aufgaben 3–7** sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen separate Blätter und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In den beiden Klausuren können zusammen maximal **120 Punkte** erreicht werden.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 6. 10. 2003 im NWZ II, Pfaffenwaldring 57, 8. Stock, durch Aushang bekanntgegeben.

  Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich bis zum 14. 11. 2003 in Raum V57.8.162 einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (5 Punkte): Geben Sie (ohne Begründung) an, ob die folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind. Die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seien zweimal stetig differenzierbar.

a) $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{c} \implies \vec{a} \parallel \vec{b}$, für Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$.

b) $\lim\limits_{x \to 0+} x\,(\ln x)^{10} = 0$.

c) $\dfrac{d}{dx}\,|f(x)| = \left|\dfrac{d}{dx}\,f(x)\right|$, für alle $x \in \mathbb{R}$.

d) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$, für alle invertierbaren Matrizen A.

e) An einem lokalen Maximum von $g(x,y)$ ist $\det \mathrm{H}\,g(x,y) < 0$.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Berechnen Sie (Angabe des Ergebnisses genügt):

a) $\dfrac{d}{dx}\,\mathrm{e}^{(x\mathrm{e}^x)}$ **b)** $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{(x+t)^2}\,dt$ **c)** $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{x^2} \mathrm{e}^{t^2}\,dt$

Aufgabe 3 (10 Punkte): Bestimmen Sie für die beiden Geraden

$$g_1 :\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad g_2 :\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

a) den Abstand von g_1 und g_2,

b) die Hesse–Normalform der Ebene E durch g_1 parallel zu g_2,

c) die Momentenform der Projektion von g_2 auf E.

Aufgabe 4 (10 Punkte): Berechnen Sie

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{(\ln x)^2}{x^2}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-x}\,dx$ **c)** $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

Hinweis: Ohne Herleitung dürfen nur die Stammfunktionen von x^α, $\sin x$, $\cos x$, e^x und $\ln x$ benutzt werden.

Aufgabe 5 (10 Punkte): Bestimmen Sie für die Quadrik

$$Q :\ 4x^2 + y^2 + 3z^2 - 4xy + x + 2y = 0$$

den Typ der Schnittkurve mit der Ebene $x = \alpha$ in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ sowie die Hauptachsen von Q, und geben Sie an, welches geometrische Objekt durch Q beschrieben wird.

Hinweis: Eine Transformation auf Normalform ist nicht notwendig; der Typ von Q ergibt sich aus der Form der Schnittkurven.

Aufgabe 6 (10 Punkte): Berechnen Sie für die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2\,, \quad \varphi(u,v) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + \mathrm{e}^v \\ v - \mathrm{e}^u \end{pmatrix}$$

die Jacobi–Matrix φ' sowie die partiellen Ableitungen

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

der Umkehrfunktion φ^{-1} an der Stelle $(x,y)^{\mathrm{t}} = (1,-1)^{\mathrm{t}} = \varphi(0,0)$.

Bestimmen Sie für $f(x,y) := g(u,v) = 2u - 3v$ den Wert von $\operatorname{grad} f$ bei $(x,y) = (1,-1)$.

Aufgabe 7 (10 Punkte): Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse–Matrix der Funktion

$$f(x,y) = \ln\left(2x + \mathrm{e}^y\right)$$

und approximieren Sie $f\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$ durch Taylor–Entwicklung um $(0,0)$ bis zu Termen der Ordnung 2 einschließlich.
