Apl. Prof. Wolf-Patrick Düll
Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Klausur

für Studierende der Fachrichtungen
el, kyb, mecha, phys, tpel

Bitte unbedingt beachten:

- Bitte beschriften Sie jeden Ihrer Zettel mit Namen und Matrikelnummer.
- Legen Sie Ihren Studentenausweis gut sichtbar vor sich auf den Tisch.
- Verwenden Sie **keinen Bleistift oder Rotstift.**
- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **180 Minuten**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 4 eigenhändig handbeschriebene DIN-A4-Seiten sowie Zeichenmaterial. Nicht erlaubt sind insbesondere Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengeräte.
- Bei den **Aufgaben 1, 3, 4c), 5, 6, 8c) und 11** sind die vollständigen Argumentationsschritte anzugeben. Bei den **Aufgaben 2, 4a), 4b), 7, 8a), 8b), 9 und 10** wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt, Nebenrechnungen werden hier nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- In dieser Klausur können bis zu **60 Punkte** erreicht werden.
- Nach der Klausur legen Sie bitte Ihre beschriebenen Blätter in den gefalteten Umschlagbogen hinein.
- Wann die Prüfungsergebnisse vorliegen, wird auf der Homepage der Vorlesung bekanntgegeben. Mit 24 und mehr Punkten ist die Klausur auf jeden Fall bestanden.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1+1+1+2+2 Punkte*) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie eine kurze Begründung. Ohne Begründung gibt es für die Angabe "Wahr" oder "Falsch" keine Punkte. Bei falschen Antworten gibt es keine Minuspunkte.

a) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente reellwertige Folgen und sei $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

b) Sei $m \in \mathbb{N}$ und $f \in C^m(\mathbb{R})$. Dann existiert eine Funktion $F \in C^{m+1}(\mathbb{R})$ mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

c) Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann ist die Menge $V = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = Bx\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.

d) Sei $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine symmetrische Matrix, die genau zwei verschiedene Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 1$ besitze. Sei außerdem $\dim(\mathrm{Kern}(S)) = 1$. Dann ist die algebraische Vielfachheit von λ_2 gleich 2.

e) Sei $K = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqq 4\}$ und $h\colon K \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die stetig auf K und stetig differenzierbar im Inneren von K sei. Dann existiert ein $\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right) \in \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass $\nabla h(x_0, y_0) = \alpha \left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right)$ ist.

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Lösung:

a) Falsch. Gegenbeispiel: Seien $a_n = 0$ und $b_n = \frac{1}{n}$. Dann gilt $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

b) Wahr. Weil $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ insbesondere stetig ist, existiert nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung eine differenzierbare Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Weil f m-mal stetig differenzierbar ist, muss F $(m+1)$-mal stetig differenzierbar sein mit $F^{(i)}(x) = f^{(i-1)}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $i = 0, \ldots, m+1$.

c) Wahr. Es gilt $V = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = Bx\} = \{x \in \mathbb{R}^n : (A-B)x = 0\} = \mathrm{Kern}(A-B)$ und $\mathrm{Kern}(A-B)$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.

d) Wahr. Weil S symmetrisch ist, ist S diagonalisierbar und somit gilt $n_a(\lambda) = n_g(\lambda)$ für alle Eigenwerte λ von S.
Es folgt $3 = n_a(\lambda_1) + n_a(\lambda_2) = n_g(\lambda_1) + n_a(\lambda_2) = \dim(\mathrm{Kern}(S)) + n_a(\lambda_2) = 1 + n_a(\lambda_2)$ und somit $n_a(\lambda_2) = 2$.

e) Wahr. Sei $g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ mit $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Weil $C = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\}$ abgeschlossen und beschränkt ist und h stetig auf C, hat h ein Extremum bei einem Punkt $\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right) \in C$ nach dem Satz vom Maximum und Minimum.
Weil $h \in C^1(\overset{\circ}{K}, \mathbb{R})$ einen Extremwert bei dem Punkt $\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right)$ im Gebiet $\overset{\circ}{K}$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ annimmt und $\nabla g(x,y) = \left(\begin{smallmatrix} 2x \\ 2y \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ für alle $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in C$ ist, existiert $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass $\nabla h(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0) = \alpha \left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right)$ gilt, wobei $\alpha = 2\lambda$ ist.

Aufgabe 2 (*2+3 Punkte*)

a) Geben Sie die komplexe Zahl $\zeta = -1 + \mathrm{i}$ in der Polardarstellung $re^{\mathrm{i}\varphi}$ mit $r \in [0, \infty)$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ an:

$$\zeta = \boxed{\sqrt{2}}\; e^{\mathrm{i}\boxed{\frac{3\pi}{4}}}$$

b) Geben Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^3 = 8\mathrm{i}$$

mit $\mathrm{Im}(z) > 0$ sowohl in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ als auch in der Polardarstellung $re^{\mathrm{i}\varphi}$ mit $r \in [0, \infty)$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ an:

$$z_1 = \boxed{2}\; e^{\mathrm{i}\boxed{\frac{\pi}{6}}} = \boxed{\sqrt{3}} + \boxed{1}\,\mathrm{i}, \qquad z_2 = \boxed{2}\; e^{\mathrm{i}\boxed{\frac{5\pi}{6}}} = \boxed{-\sqrt{3}} + \boxed{1}\,\mathrm{i}.$$

Aufgabe 3 (*1+2+2 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to 0} \frac{5x^3 + x^2}{x^3 + 4x^2} \qquad \text{c)}\ \lim_{x\to 2} \frac{\ln(2x-3)}{x^2 - 4}$$

Lösung:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} \overset{l.H.}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\begin{aligned}\text{b)}\ \lim_{x\to 0} \frac{5x^3 + x^2}{x^3 + 4x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(5x+1)}{x^2(x+4)} = \lim_{x\to 0} \frac{5x+1}{x+4} \\ &= \frac{0+1}{0+4} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Alternativlösung zu b):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{5x^3 + x^2}{x^3 + 4x^2} &\overset{l.H.}{=} \lim_{x\to 0} \frac{15x^2 + 2x}{3x^2 + 8x} \overset{l.H.}{=} \lim_{x\to 0} \frac{30x + 2}{6x + 8} \\ &= \frac{0+2}{0+8} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{c)}\ \lim_{x\to 2} \frac{\ln(2x-3)}{x^2 - 4} &\overset{l.H.}{=} \lim_{x\to 2} \frac{2/(2x-3)}{2x} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{1}{2x^2 - 3x} = \frac{1}{8-6} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Aufgabe 4 (*1+2+2 Punkte*) Gegeben sei die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+3n}{2+n} x^n.$$

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe $f(x)$:

$R = \boxed{1}$

b) Bestimmen Sie die Funktionswerte:

$f(0) = \boxed{\frac{1}{2}}$ $\quad f'(0) = \boxed{\frac{4}{3}}$

c) Sei R wie in Teilaufgabe a). Konvergiert die Potenzreihe $f(x)$ für $x = -R$? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Lösung:

Wenn eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann ist $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Sei $a_n = \dfrac{1+3n}{2+n}(-1)^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+3n}{2+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1/n+3}{2/n+1} = 3 \neq 0.$

Deswegen ist $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist also nicht konvergent, d.h. die Potenzreihe $f(x)$ konvergiert für $x = -1$ nicht.

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Aufgabe 5 (*3+3+2+3 Punkte*)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\pi} (x-3)\sin(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} (x-3)\sin(x)\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi} x\sin(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} 3\sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -x\cos(x)|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1(-\cos(x))\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} 3\sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (-x\cos(x) + \sin(x) + 3\cos(x))|_0^{\pi} \\ &= \pi - 6\end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{x^5}{\sqrt{1+x^6}}$.

Lösung: Sei $u := 1 + x^6 \Rightarrow du = 6x^5\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^6}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{6x^5}{6\sqrt{1+x^6}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{6\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{u} + C \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{1+x^6} + C.\end{aligned}$$

Somit ist $F(x) := \frac{1}{3}\sqrt{1+x^6}$ eine Stammfunktion von f.

c) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) = \frac{x^5}{\sqrt{1+x^6}}\, y(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe b).

Lösung:

Die allgemeine Lösung dieser linearen Differentialgleichung ist gegeben durch $y(x) = ce^{\frac{1}{3}\sqrt{1+x^6}}$ mit $c \in \mathbb{R}$.

d) Entscheiden Sie, ob das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

konvergiert, ohne das Integral zu berechnen, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Lösung: Da $x^2 + \sqrt{x} \geqq \sqrt{x}$, ist

$$\frac{1}{x^2+\sqrt{x}} \leqq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

für $x \in (0,1)$. Das Integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ ist konvergent:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2 - 0 = 2 < \infty.$$

Also konvergiert $\int_0^1 \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ nach dem Majorantenkriterium.

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Aufgabe 6 (*2+2 Punkte*) Gegeben seien die Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $\{b_1, b_2, b_3\}$ des $\mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{Span}\{b_1, b_2\} = \operatorname{Span}\{u_1, u_2\}$.

Lösung:

Die Vektoren u_1 und u_2 sind bereits orthogonal. Normieren ergibt

$$b_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \frac{1}{3}\sqrt{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$u_3 := u_1 \times u_2$ ist orthogonal zu u_1 und u_2, dementsprechend ist $b_3 := \frac{u_3}{\|u_3\|}$ der gesuchte Vektor. Aus

$$u_3 = u_1 \times u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

folgt

$$b_3 = \frac{1}{6}\sqrt{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie die Orthogonalprojektion von $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ auf die Ebene $E = \operatorname{Span}\{u_1, u_2\}$.

Lösung:
Die orthogonale Projektion $P_E(x)$ von x auf E lässt sich berechnen als

$$\begin{aligned} P_E(x) &= \langle x, b_1 \rangle b_1 + \langle x, b_2 \rangle b_2 \\ &= \frac{2}{2}u_1 + \frac{3}{3}u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Aufgabe 7 (*1+1+1 Punkte*) Gegeben sei die reelle Matrix:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 3 & \alpha & -1 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ -1 & \alpha & 3 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix A_α in Abhängigkeit von α:

$\det(A_\alpha) =$ $\boxed{8 - 8\alpha^2}$

b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das homogene lineare Gleichungssystem $A_\alpha x = 0$ eine eindeutige Lösung $x \in \mathbb{R}^3$?

$\boxed{\text{Für } \alpha \neq \pm 1 \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}}$

c) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ bilden die Spaltenvektoren von A_α eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

$\boxed{\text{Für } \alpha \neq \pm 1 \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}}$

Aufgabe 8 (*1+3+3 Punkte*) Gegeben sei die reelle Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ von A an:

$$\chi_A(\lambda) = \boxed{(2-\lambda)(\lambda+1)\lambda \text{ or } 2\lambda + \lambda^2 - \lambda^3}$$

b) Geben Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der Matrix A und jeweils einen zugehörigen Eigenvektor v_1, v_2, v_3 an.

$$\lambda_1 = \boxed{0} \qquad \lambda_2 = \boxed{2} \qquad \lambda_3 = \boxed{-1}$$

$$v_1 = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad v_2 = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad v_3 = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

c) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie eine kurze Begründung. Ohne Begründung gibt es für die Angabe "Wahr" oder "Falsch" keine Punkte. Bei falschen Antworten gibt es keine Minuspunkte.

i) A ist invertierbar.

ii) A ist diagonalisierbar.

iii) A ist positiv definit.

Lösung:

i) Falsch, weil $\det(A) = \chi_A(0) = 0$.

ii) Wahr, weil A drei paarweise verschiedene Eigenwerte besitzt (das charakteristische Polynom zerfällt in Linearfaktoren).

iii) Falsch, weil $v_3^T A v_3 = v_3^T \lambda_3 v_3 = \lambda_3 v_3^T v_3 = \lambda_3 \|v_3\|^2 = -\|v_3\|^2 < 0$.

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Aufgabe 9 (*1+2 Punkte*) Sei die Kurve $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 - e^{2t} \\ te^t \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Ableitung $\gamma'(t) = \boxed{\begin{pmatrix} -2e^{2t} \\ (1+t)e^t \end{pmatrix}}$

Sei nun $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Funktion mit

$$f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad f'(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie $\tilde{\gamma}(0)$ und $\tilde{\gamma}'(0)$ für die Kurve $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$.

$$\tilde{\gamma}(0) = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}} \qquad \tilde{\gamma}'(0) = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 10 (*1+1+3 Punkte*) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \cos(y) - x\sin(y).$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten von f.

$$\nabla f(x,y) = \boxed{\begin{pmatrix} -\sin(y) \\ -\sin(y) - x\cos(y) \end{pmatrix}}$$

b) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von f.

$$Hf(x,y) = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -\cos(y) \\ -\cos(y) & -\cos(y) + x\sin(y) \end{pmatrix}}$$

c) Bestimmen Sie für den stationären Punkt $(0,0)$ von f, ob f dort ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder einen Sattelpunkt besitzt. Begründen Sie Ihre Entscheidung mittels einer Berechnung.

Die Funktion f besitzt ein(en) $\boxed{\text{Sattelpunkt}}$ in $(0,0)$.

Mathematische Begründung:

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} > 0$, $\lambda_2 = \frac{-\sqrt{5}-1}{2} < 0$.
$H_f(0,0)$ ist also indefinit.

Aufgabe 11 (*2+3 Punkte*) Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^+)$ und es existiere ein $C > 0$ sowie ein $\alpha > 1$, so dass $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha f'(x) = C$ gelte.

a) Zeigen Sie, dass Konstanten $K > 0$ und $R > 0$ existieren, so dass

$$|f'(x)| < \frac{K}{x^\alpha} \quad \text{für alle } x > R \tag{1}$$

gilt.

b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, wobei $a_n = f(n+1) - f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, absolut konvergiert.

Hinweis: Verwenden Sie die Abschätzung (1).

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Lösung:

a) Sei $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^\alpha f'(x)$ und sei $\varepsilon := \frac{C}{2} > 0$. Da $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = C$ gilt, existiert $R > 0$, so dass $|g(x) - C| < \varepsilon$ für alle $x > R$.

Aus $|g(x)| - C \leqq |g(x) - C| < \varepsilon$ folgt $|g(x)| < C + \varepsilon = \frac{3C}{2}$ für $x > R$. Sei nun $K := \frac{3C}{2}$, dann gilt für alle $x > R$:

$$|f'(x)| = \frac{|x^\alpha f'(x_n)|}{x^\alpha} = \frac{|g(x)|}{x^\alpha} < \frac{K}{x^\alpha}.$$

b) Nach dem Mittelwertsatz existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in (n, n+1)$, so dass

$$|a_n| = |f(n+1) - f(n)| = |f'(x_n)|.$$

Wegen Teilaufgabe a) gilt $|a_n| = |f'(x_n)| < \dfrac{K}{x_n^\alpha} \leqq \dfrac{K}{n^\alpha}$ für $n \in \mathbb{N}_{>R}$.

Da $\alpha > 1$ ist, konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{K}{n^\alpha}$ (Integralkriterium). Nach dem Majorantenkriterium konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, d.h. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut.