Klausur zur Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Version für Betriebswirtschaftslehre (Prüfungsnummer 41991)

Allgemeine Hinweise:

- Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- In den Aufgaben 1–5 sind vollständige Lösungswege anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben ist auf gesondertem Papier vorzunehmen.
- In den Aufgaben 6–8 werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen.
- Ergebnisse müssen in der jeweils verlangten Form angegeben werden und dabei vollständig zu Ende gerechnet sein. Näherungslösungen in Dezimalbruchform werden nicht verlangt.

Hinweise für Wiederholer: Wer diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreibt und nicht besteht, ist selbst dafür verantwortlich, sich zu erkundigen, ob er eine zugehörige mündliche Nachprüfung erhält, und sich gegebenenfalls beim Prüfer anzumelden. Diese Anmeldung hat bis zum 31.10.2019 zu erfolgen.

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Sei $f : \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\} \to \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $x \mapsto f(x) := \dfrac{1}{2x+1}$.
Bestimmen Sie die Umkehrabbildung $f^{-1} : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$.

Aufgabe 2 (4+2 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^2 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ (2) $\displaystyle\int_1^4 \ln(2x) - \ln(x) \,\mathrm{d}x$

Aufgabe 3 (3+2+3 Punkte)

Sei $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) := \mathrm{e}^{x+y+z}(xy+yz+zx)$.

(1) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla_f(x,y,z)$ und die Hessematrix $\mathrm{H}_f(x,y,z)$ für $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$.

(2) Berechnen Sie alle Flachstellen von f; berechnen Sie hierzu zunächst $f_x - f_y$ und $f_y - f_z$.

(3) Welche lokalen Minimalstellen, welche lokalen Maximalstellen und welche Sattelpunkte hat f?

Aufgabe 4 (13 Punkte) Seien

$$\begin{array}{ccccccccc} f & : & \mathbf{R}^4 & \to & \mathbf{R}, & (x,y,z,w) & \mapsto & f(x,y,z,w) & := & xyzw \\ g_1 & : & \mathbf{R}^4 & \to & \mathbf{R}, & (x,y,z,w) & \mapsto & g_1(x,y,z,w) & := & x^2+y^2-2 \\ g_2 & : & \mathbf{R}^4 & \to & \mathbf{R}, & (x,y,z,w) & \mapsto & g_2(x,y,z,w) & := & z^2+w^2-2\,. \end{array}$$

Wir schreiben $g := (g_1, g_2)$.

(1) Berechnen Sie die Gradienten $\nabla_f(x,y,z,w)$, $\nabla_{g_1}(x,y,z,w)$ und $\nabla_{g_2}(x,y,z,w)$ für $(x,y,z,w) \in \mathbf{R}^4$.

(2) Sei $P := (1,1,1,1)$. Ist P eine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$? Falls ja, dann entscheide man, ob P eine lokale Maximalstelle oder eine lokale Minimalstelle oder ein Sattelpunkt von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ ist.

(3) Sei $Q := (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, 0)$. Ist Q eine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$? Falls ja, dann entscheide man, ob Q eine lokale Maximalstelle oder eine lokale Minimalstelle oder ein Sattelpunkt von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ ist.

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Sei bei einem Sparvertrag jährliche Verzinsung vereinbart, zu einem Zinsfaktor $q > 1$. Sei für die jährlich einzuzahlende Rate $R = 200$ Euro nachschüssige Zahlung vereinbart.
Sei das Anfangskapital $K_0 = 0$ Euro.

(1) Bestimmen Sie das Kapital K_5 nach Ablauf von 5 Jahren, in Abhängigkeit von q.

(2) Bei welchem Zinsfaktor q ergibt sich nach 2 Jahren ein Kapital von $K_2 = 412$ Euro?

Name, Vorname, Matrikelnummer:

Aufgabe 6 (2+2+1 Punkte) Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Formen Sie A in Zeilenstufenform um.

Zeilenstufenform von A:

(2) Geben Sie eine Basis von $\{\, x \in \mathbf{R}^{4\times 1} \,:\, Ax = 0 \,\}$ an.

Basis von $\{\, x \in \mathbf{R}^{4\times 1} \,:\, Ax = 0 \,\}$:

(3) Geben Sie den Cosinus des Winkels α an, der von den Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eingeschlossen wird.

$\cos(\alpha) =$

Aufgabe 7 (1+1 Punkte) Berechnen Sie folgende Reihengrenzwerte.

(1) $$\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k} = \boxed{}$$

(2) $$\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k} = \boxed{}$$

Aufgabe 8 (2 Punkte)

Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie: $A^{-1} = \boxed{}$