Aufgabe 1 (*12 Punkte*)

Es seien die Flächen $A, B \subseteqq \mathbb{R}^3$ und das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$A = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geqq 0\Big\}, \qquad g(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$
$$B = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2, z \leqq 0\Big\},$$

a) (*4 Punkte*) Geben Sie für A und B jeweils Parametrisierungen *in kartesischen Koordinaten* an.

b) (*6 Punkte*) Berechnen Sie das Volumen des von A und B eingeschlossenen Körpers K.

c) (*2 Punkte*) Berechnen Sie den Ausfluss $A(g, \partial K)$.

Lösung

a) Die Parametrisierung über die x, y-Ebene ist die Folgende:

$$\Phi_A : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqq 1\} \to \mathbb{R}^3,$$
$$(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{pmatrix},$$
$$\Phi_B : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqq 1\} \to \mathbb{R}^3,$$
$$(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 - \sqrt{2 - x^2 - y^2} \end{pmatrix}.$$

b) Das Volumen ergibt sich dann durch Integration in z Richtung:

$$\begin{aligned}
V(K) = \int_K \mathrm{d}V &= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{1-\sqrt{2-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \mathrm{d}z\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1 - x^2 - y^2} + \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} -1 + \sqrt{2 - x^2 - y^2}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r\sqrt{1 - r^2}\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}r + \int_0^1 \int_0^{2\pi} (-1 + \sqrt{2 - r^2}) r\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}r \\
&= 2\pi \int_0^1 r\sqrt{1 - r^2}\, \mathrm{d}r + 2\pi \int_0^1 (-1 + \sqrt{2 - r^2}) r\, \mathrm{d}r \\
&= 2\pi \int_1^0 -t^2\, \mathrm{d}t + 2\pi \int_{\sqrt{2}}^1 s - s^2\, \mathrm{d}s \qquad s = \sqrt{2 - r^2}, \quad t = \sqrt{1 - r^2}, \quad \tfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} = -\tfrac{r}{s}, \quad \tfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} = -\tfrac{r}{t} \\
&= 2\pi \int_0^1 t^2\, \mathrm{d}t + 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} s^2 - s\, \mathrm{d}s \\
&= \tfrac{2\pi}{3} + 2\pi \Big[\tfrac{1}{3}s^3 - \tfrac{1}{2}s^2\Big]_1^{\sqrt{2}} \\
&= \tfrac{2\pi}{3} + 2\pi \Big(\tfrac{2}{3}\sqrt{2} - 1 - (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2})\Big) \\
&= \tfrac{\pi}{3}(4\sqrt{2} - 3).
\end{aligned}$$

c) Mit dem Satz von Gauss gilt

$$A(g, \partial K) = \int_{\partial K} g \cdot n \,\mathrm{d}O = \int_K \operatorname{div} g \,\mathrm{d}x = \int_K 3 \,\mathrm{d}x = \pi(4\sqrt{2} - 3).$$

Aufgabe 2 (*6 Punkte*)

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} y.$$

Lösung

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von A ist gegeben durch

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + 4\lambda + 4\,.$$

Die Nullstellen dieses Polynoms und damit die Eigenwerte von A sind folglich

$$\lambda_{1/2} = -2 \pm \sqrt{2^2 - 4} = -2\,,$$

d. h. -2 ist eine doppelte Nullstelle. Das Fundamentalsystem der zugehörigen skalaren Differentialgleichung $y'' + 4y' + 4y = 0$ wird folglich von den Funktionen e^{-2x} und $x\mathrm{e}^{-2x}$ gebildet. Für die zugehörige Wronski-Matrix bedeutet dies

$$M(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2x} & x\mathrm{e}^{-2x} \\ -2\mathrm{e}^{-2x} & (1-2x)\mathrm{e}^{-2x} \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad M(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und folglich} \quad M(0)^{-\top} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung zum Anfangswert

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist somit gegeben durch

$$\begin{aligned} f_1 &= \left(v_1 \,\middle|\, Av_1\right) M(0)^{-\top} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2x} \\ x\mathrm{e}^{-2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2x} \\ x\mathrm{e}^{-2x} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2x} \\ x\mathrm{e}^{-2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+3x)\mathrm{e}^{-2x} \\ -3x\mathrm{e}^{-2x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Analog ist die Lösung zum Anfangswert

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben durch

$$f_2 = \left(v_2 \;\middle|\; Av_2\right) M(0)^{-\top} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2x} \\ x\mathrm{e}^{-2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2x} \\ x\mathrm{e}^{-2x} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2x} \\ x\mathrm{e}^{-2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x\mathrm{e}^{-2x} \\ (1-3x)\mathrm{e}^{-2x} \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich die allgemeine homogene Lösung als

$$y_\mathrm{h}(x) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} (1+3x)\mathrm{e}^{-2x} \\ -3x\mathrm{e}^{-2x} \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 3x\mathrm{e}^{-2x} \\ (1-3x)\mathrm{e}^{-2x} \end{pmatrix} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Variante: Alternativ kann man als zweite Fundamentallösung auch

$$f_2 = (f_1)' = \begin{pmatrix} (1-6x)\mathrm{e}^{-2x} \\ (-3+6x)\mathrm{e}^{-2x} \end{pmatrix}$$

wählen. Damit ergibt sich die allgemeine homogene Lösung als

$$y_\mathrm{h}(x) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} (1+3x)\mathrm{e}^{-2x} \\ -3x\mathrm{e}^{-2x} \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} (1-6x)\mathrm{e}^{-2x} \\ (-3+6x)\mathrm{e}^{-2x} \end{pmatrix} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Aufgabe 3 (*9 Punkte*)

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y^{(4)} - y^{(2)} = x + 1 - 4\cos(x)\ .$$

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung.

Lösung

SCHRITT 1:(3 Punkte) In einem ersten Schritt löst man die homogene Gleichung $y^{(4)} - y^{(2)} = 0$. Das charakteristische Polynom $P(X)$ dieser Differentialgleichung ist $P(X) = X^4 - X^2$. Eine offensichtliche doppelte Nullstelle von P ist 0.

$$P(X) = X^4 - X^2 = (X^2 - 1)X^2$$

und hat die übrigen Nullstelle 1 und -1.
Die allgemeine homogene Lösung f_h ist dann:

$$f_h(x) = ae^x + be^{-x} + c + dx$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

SCHRITT 2:(4 Punkte) In einem zweiten Schritt bestimmt man nun irgendeine beliebige (partikuläre) Lösung der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung durch einen Ansatz nach Art der rechten Seite.

Partikuläre Lösung durch Ansatz nach Art der rechten Seite

Aufgrund des Superpositionsprinzips bekommt man eine partikuläre Lösung f_p von $y^{(4)} - y^{(2)} = x + 1 - 4\cos(x)$, indem man eine partikuläre Lösung f_{p_1} von $y^{(4)} - y^{(2)} = x + 1$ und eine partikuläre Lösung f_{p_2} von $y^{(4)} - y^{(2)} = -4\cos(x)$ bestimmt und diese beiden addiert: $f_p = f_{p_1} + f_{p_2}$.

- Zunächst zu $y^{(4)} - y^{(2)} = 1 + x$:
  Weil 0 eine doppelte Nullstelle von P ist (Resonanz), machen wir den Ansatz

  $$f_{p_1}(x) = \alpha x^3 + \beta x^2.$$

  Viermaliges Ableiten ergibt

  $$\begin{aligned} f'_{p_1}(x) &= 3\alpha x^2 + 2\beta x, \\ f^{(2)}_{p_1}(x) &= 6\alpha x + 2\beta, \\ f^{(3)}_{p_1}(x) &= 6\alpha \\ f^{(4)}_{p_1}(x) &= 0. \end{aligned}$$

Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$-6\alpha x - 2\beta = x + 1$$

und damit $\alpha = -1/6$ und $\beta = -1/2$. Also

$$f_{p_1}(x) = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2.$$

- Jetzt zu $-4\cos(x)$:
  Weil $\pm i$ keine Nullstelle von P ist (keine Resonanz), machen wir den Ansatz

$$f_{p_2}(x) = \alpha\cos(x) + \beta\sin(x).$$

Viermaliges Ableiten ergibt

$$\begin{aligned} f'_{p_2}(x) &= -\alpha\sin(x) + \beta\cos(x), \\ f^{(2)}_{p_2}(x) &= -\alpha\cos(x) - \beta\sin(x), \\ f^{(3)}_{p_2}(x) &= \alpha\sin(x) - \beta\cos(x), \\ f^{(4)}_{p_2}(x) &= \alpha\cos(x) + \beta\sin(x). \end{aligned}$$

Setzt man diese Ableitungen in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$2\alpha\cos(x) + 2\beta\sin(x) = -4\cos(x).$$

Damit ist $\alpha = -2$ und $\beta = 0$. Also

$$f_{p_2}(x) = -2\cos(x).$$

Insgesamt erhalten wir $f_p(x) = f_{p_1}(x) + f_{p_2}(x) = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2\cos(x)$.

SCHRITT 3:(1 Punkt) In einem dritten und letzten Schritt muss man schließlich noch die oben bestimmte allgemeine homogene Lösung und die oben bestimmte partikuläre Lösung addieren:

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = ae^x + be^{-x} + c + dx - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2\cos(x)$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (*5 Punkte*)

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = 2e^y \sinh x, \quad y(0) = 0.$$

Lösung

Es handelt sich um eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

Wir formen sie um zu

$$e^{-y}dy = 2\sinh x dx$$

und erhalten durch Integration auf beiden Seiten

$$\int e^{-y}dy = -e^{-y} = \int 2\sinh x dx = 2\cosh x + c$$

Auflösen nach y liefert

$$y = -\ln(-2\cosh x - c)$$

Zur Lösung des Anfangswertproblems setzen wir

$$0 = y(0) = -\ln(-2\cosh 0 - c) = -\ln(-2 - c)$$

Also gilt

$$-2 - c = 1$$

bzw.

$$c = -3$$

und die Lösung lautet

$$y = -\ln(-2\cosh x + 3)$$

Aufgabe 5 (*8 Punkte*)

Gegeben sei die 6-periodische Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} -2 & \text{für } x \in (-3,0], \\ 0 & \text{für } x \in (0,3]. \end{cases}$$

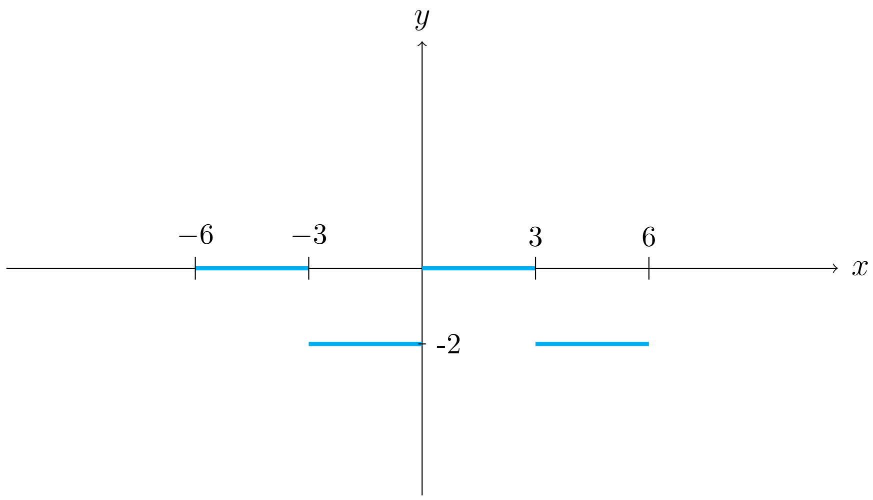
(a) (*2 Punkte*) Skizzieren Sie den Graphen auf dem Intervall $(-6,6]$;

(b) (*4 Punkte*) Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe von f.

(c) (*2 Punkte*) Bestimmen Sie für alle $x \in (-6,6)$ den Grenzwert der Fourierreihe.

Lösung

(a) Skizze:



(b) (1) $f(x) = g(x) - 1$, mit der 6-periodischen ungeraden Funktion

$$g(x) := \begin{cases} -1 & \text{für } x \in (-3,0], \\ 1 & \text{für } x \in (0,3]. \end{cases}$$

Also gilt

$$a_n = 0, \quad \forall n > 0.$$

(2) Der Koeffizient a_0 folgt durch Integration:

$$a_0 = \frac{2}{6}\int_{-3}^{3} f(x)dx = \frac{1}{3}\int_{-3}^{0}(-2)dx + 0 = \frac{1}{3}(-6) = -2.$$

Alternativ kann man $a_0/2 = -1$ auch aus $f(x) = g(x) - 1$ folgern.

(3) Die Koeffizienten b_n folgen durch Integration:

$$\begin{aligned}
b_n =& \frac{2}{6}\int_{-3}^{3} f(x)\sin(n\frac{2\pi}{6}x)dx\\
=& \frac{1}{3}\int_{-3}^{0}(-2\sin(\frac{n\pi}{3}x))dx + 0\\
=& -\frac{2}{3}\int_{-3}^{0}\sin(\frac{n\pi}{3}x)dx\\
=& -\frac{2}{3}[-\frac{3}{n\pi}\cos(\frac{n\pi}{3}x)]_{-3}^{0}\\
=& \frac{2}{n\pi}(\cos(0)-\cos(-n\pi))\\
=& \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)\\
=& \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{für } n \text{ ungerade,}\\ 0 & \text{für } n \text{ gerade.}\end{cases}
\end{aligned}$$

(4) Die Fourierreihe von f ist

$$f(x) \sim -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi}\sin(\frac{(2n+1)\pi}{3}x).$$

(c) Die Funktion f ist stetig differenzierbar in den Intervallen $((3n, 3(n+1))$ $(n \in \mathbb{Z})$ mit endlichen links- bzw. rechtseitigen Grenzwerten sowohl für f als auch f' in allen Punkten $\{3n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$. Da die Funktion f insbesondere stetig ist in $(3n, 3(n+1))$ $(n \in \mathbb{Z})$, konvergiert die Fourierreihe in diesem Bereich also gegen $f(x)$.

In den Punkten $x_0 \in \{-3, 0, 3\}$ hingegen macht f einen Sprung der Höhe 2, sodass sich der Grenzwert dort berechnet als

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_0+0} f(x) + \lim_{x\to x_0-0} f(x)\right) = \frac{1}{2}(-2+0) = -1.$$