

Apl. Prof. Wolf-Patrick Düll
Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Klausur

für Studierende der Fachrichtungen
el, kyb, mecha, phys, tpe

Bitte unbedingt beachten:

- Bitte beschriften Sie jeden Ihrer Zettel mit Namen und Matrikelnummer.
- Legen Sie Ihren Studentenausweis gut sichtbar vor sich auf den Tisch.
- Verwenden Sie **keinen Bleistift oder Rotstift**.
- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **180 Minuten**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 4 eigenhändig handbeschriebene DIN-A4-Seiten sowie Zeichenmaterial. Nicht erlaubt sind insbesondere Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengeäte.
- Bei den **Aufgaben 1, 3, 5c), 6, 7, 9c) und 11** sind die vollständigen Argumentationsschritte anzugeben. Bei den **Aufgaben 2, 4, 5a), 5b), 8, 9a), 9b) und 10** wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt, Nebenrechnungen werden hier nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- In dieser Klausur können bis zu **60 Punkte** erreicht werden.
- Nach der Klausur legen Sie bitte Ihre beschriebenen Blätter in den gefalteten Umschlagbogen hinein.
- Wann die Prüfungsergebnisse vorliegen, wird auf der Homepage der Vorlesung bekanntgegeben. Mit 24 und mehr Punkten ist die Klausur auf jeden Fall bestanden.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1+1+1+2+2 Punkte) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie eine kurze Begründung. Ohne Begründung gibt es für die Angabe “Wahr” oder “Falsch” keine Punkte. Bei falschen Antworten gibt es keine Minuspunkte.

- Eine reellwertige Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.
- Sei $f \in C^0(\mathbb{R})$. Dann existiert eine Funktion $F \in C^1(\mathbb{R})$ mit $F(0) = 0$ und $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- Die Menge $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y \right\}$ ist ein Untervektorraum von \mathbb{R}^2 .
- Es existiert eine symmetrische Matrix $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit drei unterschiedlichen Eigenwerten, so dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren von S sind.
- Seien $n \in \mathbb{N}$ und $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Ist $x_0 \in \mathbb{R}^n$ eine Extremstelle der Funktion f unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$, so sind die Vektoren $\nabla f(x_0)$ und $\nabla g(x_0)$ linear abhängig.

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Aufgabe 2 (2+3 Punkte)

- Geben Sie die komplexe Zahl $\zeta = \frac{1+2i}{1-i}$ in kartesischen Koordinaten $a+ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an:

$$\zeta = \boxed{} + \boxed{} i.$$

- Geben Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^3 = -8,$$

mit $\operatorname{Re}(z) > 0$, sowohl in der Form $a+ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ als auch in der Polardarstellung $re^{i\varphi}$ mit $r \in [0, \infty)$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ an:

$$z_1 = \boxed{} e^{i \boxed{}} = \boxed{} + \boxed{} i, \quad z_2 = \boxed{} e^{i \boxed{}} = \boxed{} + \boxed{} i.$$

Aufgabe 3 (1+1+2 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + x^2}{x^3 + 4x^2} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} \right)$$

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Aufgabe 4 (2+2 Punkte) Gegeben sei die Funktion $f: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \ln(\sin(x))$.

a) Bestimmen Sie

$$f'(x) =$$

$$f''(x) =$$

b) Bestimmen Sie für f das Taylorpolynom der zweiten Stufe um den Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

$$T_2(f, x, \frac{\pi}{2}) =$$

Aufgabe 5 (1+2+2 Punkte) Gegeben sei die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)^3} x^n.$$

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe $f(x)$:

$$R =$$

b) Bestimmen Sie die Funktionswerte:

$$f(0) =$$

$$f'(0) =$$

c) Sei R wie in Teilaufgabe a). Konvergiert die Potenzreihe $f(x)$ für $x = -R$? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Aufgabe 6 (3+3+2+3 Punkte)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 x e^{x+1} dx.$$

b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 \sqrt{1+x^4}$.

c) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) = x^3 \sqrt{1+x^4} y(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe b).

d) Entscheiden Sie, ob das uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} dx$$

konvergiert, ohne das Integral zu berechnen, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Aufgabe 7 (2+2 Punkte) Gegeben seien die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $\{b_1, b_2, b_3\}$ des \mathbb{R}^3 mit $\text{Span}\{b_1, b_2\} = \text{Span}\{u, v\}$.
- Bestimmen Sie den Abstand des Punktes x von der Ebene $E = \text{Span}\{u, v\}$.

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Aufgabe 8 (1+1+1 Punkte) Gegeben sei die reelle Matrix:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha + 1 & 1 & 1 - \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- Bestimmen Sie die Determinante der Matrix A_α in Abhängigkeit von α :

$$\det(A_\alpha) =$$

- Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das homogene lineare Gleichungssystem $A_\alpha x = 0$ mehr als eine Lösung $x \in \mathbb{R}^3$?

- Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Matrix A_α invertierbar?

Aufgabe 9 (1+3+3 Punkte) Gegeben sei die reelle Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ von A an:

$$\chi_A(\lambda) = \boxed{}$$

b) Geben Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der Matrix A und jeweils einen zugehörigen Eigenvektor v_1, v_2, v_3 an.

$$\lambda_1 = \boxed{} \quad \lambda_2 = \boxed{} \quad \lambda_3 = \boxed{}$$

$$v_1 = \boxed{\phantom{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}} \quad v_2 = \boxed{\phantom{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}} \quad v_3 = \boxed{\phantom{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

c) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie eine kurze Begründung. Ohne Begründung gibt es für die Angabe “Wahr” oder “Falsch” keine Punkte. Bei falschen Antworten gibt es keine Minuspunkte.

i) A ist invertierbar.

ii) A ist diagonalisierbar.

iii) A ist positiv definit.

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Aufgabe 10 (1+1+3 Punkte) Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2.$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten von f .

$$\nabla f(x, y) = \boxed{\phantom{\begin{pmatrix} 6x^2 - 6y \\ -6x + 6y \end{pmatrix}}}$$

b) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von f .

$$Hf(x, y) =$$

c) Bestimmen Sie für den stationären Punkt $(0, 0)$ von f , ob f dort ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder einen Sattelpunkt besitzt. Begründen Sie Ihre Entscheidung mittels einer Berechnung.

Die Funktion f besitzt ein(en)

in $(0, 0)$.

Mathematische Begründung:

Aufgabe 11 (2+3 Punkte) Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^+)$ und es existiere ein $C > 0$ sowie ein $\alpha \in (0, 1)$, so dass $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f'(x) = C$ gelte.

a) Zeigen Sie, dass Konstanten $K > 0$ und $R > 0$ existieren, so dass

$$|f'(x)| > \frac{K}{x^\alpha} \quad \text{für alle } x > R \quad (1)$$

gilt.

b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, wobei $a_n = |f(n+1) - f(n)|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, divergiert.

Hinweis: Verwenden Sie die Abschätzung (1).

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.