Apl. Prof. Wolf-Patrick Düll
Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Klausur

für Studierende der Fachrichtungen
el, kyb, mecha, phys, tpel

Bitte unbedingt beachten:

- Bitte beschriften Sie jeden Ihrer Zettel mit Namen und Matrikelnummer.
- Legen Sie Ihren Studentenausweis gut sichtbar vor sich auf den Tisch.
- Verwenden Sie **keinen Bleistift oder Rotstift.**
- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **180 Minuten**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 4 eigenhändig handbeschriebene DIN-A4-Seiten sowie Zeichenmaterial. Nicht erlaubt sind insbesondere Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengeräte.
- Bei den **Aufgaben 1, 3, 5c), 6, 7, 9c) und 11** sind die vollständigen Argumentationsschritte anzugeben. Bei den **Aufgaben 2, 4, 5a), 5b), 8, 9a), 9b) und 10** wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt, Nebenrechnungen werden hier nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- In dieser Klausur können bis zu **60 Punkte** erreicht werden.
- Nach der Klausur legen Sie bitte Ihre beschriebenen Blätter in den gefalteten Umschlagbogen hinein.
- Wann die Prüfungsergebnisse vorliegen, wird auf der Homepage der Vorlesung bekanntgegeben. Mit 24 und mehr Punkten ist die Klausur auf jeden Fall bestanden.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1+1+1+2+2 Punkte*) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie eine kurze Begründung. Ohne Begründung gibt es für die Angabe "Wahr" oder "Falsch" keine Punkte. Bei falschen Antworten gibt es keine Minuspunkte.

a) Eine reellwertige Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.

b) Sei $f \in C^0(\mathbb{R})$. Dann existiert eine Funktion $F \in C^1(\mathbb{R})$ mit $F(0) = 0$ und $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

c) Die Menge $V = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 = y \right\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

d) Es existiert eine symmetrische Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit drei unterschiedlichen Eigenwerten, so dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren von S sind.

e) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Ist $x_0 \in \mathbb{R}^n$ eine Extremstelle der Funktion f unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$, so sind die Vektoren $\nabla f(x_0)$ und $\nabla g(x_0)$ linear abhängig.

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Lösung:

a) Falsch: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$ ist offensichtlich beschränkt (da $|a_n| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt), aber nicht konvergent (da $|a_n - a_{n+1}| = 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt).

b) Wahr: Da $f \in C^0(\mathbb{R})$, ist nach dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung die Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \int_0^x f(y)\mathrm{d}y$$

in $C^1(\mathbb{R})$ mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Außerdem gilt $F(0) = 0$.

c) Falsch: Es gilt $(1,1)^\top \in V$ (weil $1^2 = 1$), aber $2 \cdot (1,1)^\top = (2,2)^\top \notin V$ (weil $2^2 = 4 \neq 2$). Die Menge V ist also nicht abgeschlossen bzgl. der Skalarmultiplikation und somit kein Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$.

d) Falsch: Weil S drei verschiedene Eigenwerte besitzt, hat jeder Eigenwert von S geometrische Vielfachheit 1. Deswegen gehören die linear unabhängigen Eigenvektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu verschiedenen Eigenwerten.

Weil S symmetrisch ist, sind Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal. Somit führt $\langle v_1, v_2 \rangle = 1 \neq 0$ zu einem Widerspruch.

e) Wahr: Ist $\nabla g(x_0) = 0$, so sind $\nabla f(x_0)$ und $\nabla g(x_0)$ linear abhängig.

Ist $\nabla g(x_0) \neq 0$, so folgt aus der Lagrange-Multiplikatorenregel, dass $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $\nabla f(x_0) + \lambda \nabla g(x_0) = 0$ gilt. Die Vektoren $\nabla f(x_0)$ und $\nabla g(x_0)$ sind somit linear abhängig.

Aufgabe 2 (*2+3 Punkte*)

a) Geben Sie die komplexe Zahl $\zeta = \dfrac{1+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ in kartesischen Koordinaten $a + \mathrm{i}b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an:

$$\zeta = \boxed{-\tfrac{1}{2}} + \boxed{\tfrac{3}{2}}\,\mathrm{i}.$$

b) Geben Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^3 = -8,$$

mit $\operatorname{Re}(z) > 0$, sowohl in der Form $a + \mathrm{i}b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ als auch in der Polardarstellung $re^{\mathrm{i}\varphi}$ mit $r \in [0, \infty)$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ an:

$$z_1 = \boxed{2}\; e^{\mathrm{i}\boxed{\frac{\pi}{3}}} = \boxed{1} + \boxed{\sqrt{3}}\,\mathrm{i}, \qquad z_2 = \boxed{2}\; e^{\mathrm{i}\boxed{\frac{5\pi}{3}}} = \boxed{1} + \boxed{-\sqrt{3}}\,\mathrm{i}.$$

Aufgabe 3 (*1+1+2 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} \qquad \text{b) } \lim_{x\to\infty} \frac{5x^3 + x^2}{x^3 + 4x^2} \qquad \text{c) } \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right)$$

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Lösung:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} \overset{l.H.}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\text{b) } \lim_{x\to\infty} \frac{5x^3 + x^2}{x^3 + 4x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{5 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{4}{x}} = \frac{5+0}{1+0} = 5$$

$$\begin{aligned}\text{c) } \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1) - (x-1)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = 0\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (*2+2 Punkte*) Gegeben sei die Funktion $f\colon (0, \pi) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \ln(\sin(x))$.

a) Bestimmen Sie

$$f'(x) = \boxed{\frac{\cos(x)}{\sin(x)}}$$

$$f''(x) = \boxed{-\frac{1}{\sin^2(x)}}$$

b) Bestimmen Sie für f das Taylorpolynom der zweiten Stufe um den Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

$$T_2(f, x, \tfrac{\pi}{2}) = \boxed{-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}$$

Aufgabe 5 (*1+2+2 Punkte*) Gegeben sei die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)^3} x^n.$$

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe $f(x)$:

$R = \boxed{\frac{1}{2}}$

b) Bestimmen Sie die Funktionswerte:

$f(0) = \boxed{1}$ $\quad f'(0) = \boxed{\frac{1}{4}}$

c) Sei R wie in Teilaufgabe a). Konvergiert die Potenzreihe $f(x)$ für $x = -R$? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Lösung:

Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $(n+1)^3 < ((n+1)+1)^3$ und somit

$$\frac{1}{(n+1)^3} > \frac{1}{((n+1)+1)^3}.$$

Außerdem ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^3} = 0$. Die Folge $\left(\frac{1}{(n+1)^3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also eine monoton fallende Nullfolge. Die alternierende Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^3}$ konvergiert deswegen nach dem Leibnizkriterium, d.h. die Potenzreihe $f(x)$ konvergiert für $x = -R = -\frac{1}{2}$.

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Aufgabe 6 (*3+3+2+3 Punkte*)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 xe^{x+1}\,\mathrm{d}x.$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^{x+1}\mathrm{d}x &= xe^{x+1}\big|_0^1 - \int_0^1 e^{x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \left(xe^{x+1} - e^{x+1}\right)\big|_0^1 \\ &= e\end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3\sqrt{1+x^4}$.

Lösung: Sei $u := 1 + x^4 \Rightarrow \mathrm{d}u = 4x^3\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int x^3\sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int 4x^3\sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int \sqrt{u}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{6}u^{3/2} + C \\ &= \frac{1}{6}\left(1+x^4\right)^{3/2} + C.\end{aligned}$$

Somit ist $F(x) = \frac{1}{6}\left(1+x^4\right)^{3/2}$ eine Stammfunktion von f.

c) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) = x^3\sqrt{1+x^4}\; y(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe b).

Lösung: Die allgemeine Lösung dieser linearen Differentialgleichung ist gegeben durch $y(x) = ce^{\frac{1}{6}\left(1+x^4\right)^{3/2}}$ mit $c \in \mathbb{R}$.

d) Entscheiden Sie, ob das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

konvergiert, ohne das Integral zu berechnen, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Lösung: Da $x^2 + \sqrt{x} \geqq x^2$, ist

$$\frac{1}{x^2+\sqrt{x}} \leqq \frac{1}{x^2}$$

für $x \in (1,\infty)$. Das Integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ ist konvergent:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\left.\frac{1}{x}\right|_1^\infty = 0 - (-1) = 1 < \infty.$$

Also konvergiert $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ nach dem Majorantenkriterium.

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Aufgabe 7 (*2+2 Punkte*) Gegeben seien die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $\{b_1, b_2, b_3\}$ des $\mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{Span}\{b_1, b_2\} = \operatorname{Span}\{u, v\}$.

Lösung:

Die Vektoren u und v sind bereits orthogonal. Normieren ergibt

$$b_1 = \frac{u}{\|u\|} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \frac{v}{\|v\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$w := u \times v$ ist orthogonal zu u und v, dementsprechend ist $b_3 := \frac{\tilde{w}}{\|\tilde{w}\|}$ der gesuchte Vektor. Aus

$$w = u \times v = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

folgt

$$b_3 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes x von der Ebene $E = \operatorname{Span}\{u, v\}$.

Lösung:

Die orthogonale Projektion $P_E(x)$ von x auf E lässt sich berechnen als

$$\begin{aligned} P_E(x) &= \langle x, b_1\rangle b_1 + \langle x, b_2\rangle b_2 \\ &= -5b_1 + 2b_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der Abstand des Punktes x von der Ebene E ist somit $\|x - P_E(x)\| = \| (6, 0, 8)^\top \| = 10$.

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Aufgabe 8 (*1+1+1 Punkte*) Gegeben sei die reelle Matrix:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha+1 & 1 & 1-\alpha \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix A_α in Abhängigkeit von α:

$$\det(A_\alpha) = \boxed{2\alpha - 2\alpha^3}$$

b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das homogene lineare Gleichungssystem $A_\alpha x = 0$ mehr als eine Lösung $x \in \mathbb{R}^3$?

Für $\alpha = -1$, $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$

c) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Matrix A_α invertierbar?

Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ (oder für $\alpha \neq -1, 0, 1$)

Aufgabe 9 (*1+3+3 Punkte*) Gegeben sei die reelle Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ von A an:

$$\chi_A(\lambda) = \boxed{(1-\lambda)(-8-2\lambda+\lambda^2)\ (= -8 + 6\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3)}$$

b) Geben Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der Matrix A und jeweils einen zugehörigen Eigenvektor v_1, v_2, v_3 an.

$$\lambda_1 = \boxed{-2} \qquad \lambda_2 = \boxed{1} \qquad \lambda_3 = \boxed{4}$$

$$v_1 = \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad v_2 = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad v_3 = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

c) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie eine kurze Begründung. Ohne Begründung gibt es für die Angabe "Wahr" oder "Falsch" keine Punkte. Bei falschen Antworten gibt es keine Minuspunkte.

i) A ist invertierbar.

ii) A ist diagonalisierbar.

iii) A ist positiv definit.

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter. Lösung:

i) Wahr, weil $\det(A) = \chi_A(0) = -8 \neq 0$.

ii) Wahr, weil A drei paarweise verschiedene Eigenwerte besitzt (das charakteristische Polynom zerfällt in Linearfaktoren).

iii) Falsch, weil $v_1^T A v_1 = v_1^T \lambda_1 v_1 = \lambda_1 v_1^T v_1 = \lambda_1 \|v_1\|^2 = -2\|v_1\|^2 < 0$.

Aufgabe 10 (*1+1+3 Punkte*) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2.$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten von f.

$$\nabla f(x, y) = \boxed{\begin{pmatrix} 6x^2 - 6y \\ -6x + 6y \end{pmatrix}}$$

b) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von f.

$$Hf(x, y) = \boxed{\begin{pmatrix} 12x & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}}$$

c) Bestimmen Sie für den stationären Punkt $(0, 0)$ von f, ob f dort ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder einen Sattelpunkt besitzt. Begründen Sie Ihre Entscheidung mittels einer Berechnung.

Die Funktion f besitzt ein(en) Sattelpunkt in $(0, 0)$.

Mathematische Begründung:

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$ besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = 3(1 + \sqrt{5}) > 0,\ \lambda_2 = 3(1 - \sqrt{5}) < 0$.
$H_f(0, 0)$ ist also indefinit.

Aufgabe 11 (*2+3 Punkte*) Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^+)$ und es existiere ein $C > 0$ sowie ein $\alpha \in (0, 1)$, so dass $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha f'(x) = C$ gelte.

a) Zeigen Sie, dass Konstanten $K > 0$ und $R > 0$ existieren, so dass

$$|f'(x)| > \frac{K}{x^\alpha} \quad \text{für alle } x > R \tag{1}$$

gilt.

b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, wobei $a_n = |f(n + 1) - f(n)|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, divergiert.
Hinweis: Verwenden Sie die Abschätzung (1).

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Lösung:

a) Sei $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^\alpha f'(x)$ und sei $\varepsilon := \frac{C}{2} > 0$. Da $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = C$ gilt, existiert $R > 0$, so dass $|g(x) - C| < \varepsilon$ für alle $x > R$ ist.

Aus $C - |g(x)| \leqq |g(x) - C| < \varepsilon$ folgt $|g(x)| > C - \varepsilon = \frac{C}{2}$ für $x > R$. Sei nun $K := \frac{C}{2}$, dann gilt für alle $x > R$:

$$|f'(x)| = \frac{|x^\alpha f'(x)|}{x^\alpha} = \frac{|g(x)|}{x^\alpha} > \frac{K}{x^\alpha}.$$

b) Nach dem Mittelwertsatz existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in (n, n+1)$, so dass

$$a_n = |f(n+1) - f(n)| = |f'(x_n)|.$$

Wegen Teilaufgabe a) gilt $a_n = |f'(x_n)| > \dfrac{K}{x_n^\alpha} \geqq \dfrac{K}{(n+1)^\alpha}$ für $n \in \mathbb{N}_{>R}$.

Da $\alpha < 1$ ist, divergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{K}{(n+1)^\alpha}$ (Integralkriterium). Nach dem Minorantenkriterium divergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.