Nachname:	Matrikelnr.:	Studiengang: ☐ wiwi ☐ winf ☐ t.o. bwl ☐ NF bau ☐ ______
Vorname:	Gruppennr.:	

vom Korrektor auszufüllen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	**Summe**	Korrektor

Klausur zur Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Modul 100050 & 581201

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 4 Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In den **Aufgaben 1-7** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- In den **Aufgaben 8-15** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt. Schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes abgegebene Blatt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 15. 04. 2020 über das Campus-System der Universität Stuttgart (`https://campus.uni-stuttgart.de/`) bekannt gegeben.
- **Hinweise für Wiederholer:**
  Wer diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreibt und nicht besteht, ist selbst dafür verantwortlich sich zu erkundigen, ob er eine zugehörige mündliche Nachprüfung erhält, und sich gegebenenfalls beim Prüfer anzumelden. Diese Anmeldung hat bis zum 29.04.2020 zu erfolgen.

VIEL ERFOLG!

Aufgabe 1 (*2 Punkte*)

Gegeben seien die Funktionen $f(x) = 2\cos(x)\sin(x)$ und $g(x) = \sin(5e^x)$.

Bestimmen Sie die folgenden Ableitungen:

$$f'(x) = \boxed{2\cos(x)^2 - 2\sin(x)^2} \qquad g'(x) = \boxed{5e^x \cdot \cos(5e^x)}$$

Aufgabe 2 (*2 Punkte*)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^2$ des Gleichungssystems $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}. \qquad \mathcal{L} = \left\{ \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}} \right\}$$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}$ der Gleichung

$$\frac{|x-4|}{x+2} = \frac{x-1}{x+7}. \qquad \mathcal{L} = \left\{ \boxed{-5, 3, 13} \right\}$$

Aufgabe 4 (*1+2=3 Punkte*)

(a) In einem Sparvertrag seien $K_0 = 8000$ Euro mit 50% Jahreszins angelegt. Die am Ende eines jeden Jahres einzuzahlenden Sparrate beträgt $R = 400$ Euro (nachschüssige Zahlung).
Wieviel Kapital K_3 ist nach Ablauf von 3 Jahren vorhanden?

$$K_3 = \boxed{28900 \text{ (Euro)}}$$

(b) Seien 1000 Euro zu einem Jahreszins von 2% angelegt. Berechnen Sie die Kapital-Funktion $K(t)$ und die Wachstumsrate $R_K(t)$.

$$K(t) = \boxed{1000 \cdot (1.02)^t} \qquad R_K(t) = \boxed{\ln(1.02)}$$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*)

Gegeben sei die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 16 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 16 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von A:

$$\lambda_1 = \boxed{-3} \qquad \lambda_2 = \boxed{1} \qquad \lambda_3 = \boxed{2}$$

Aufgabe 6 (*3+2=5 Punkte*)

(a) Geben Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichung in der Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an:

$$(z+2)^2 = 9i.$$

$$\boxed{z_0 = \tfrac{3\sqrt{2}}{2} - 2 + \tfrac{3\sqrt{2}}{2}i,\ z_1 = -(\tfrac{3\sqrt{2}}{2} + 2) - \tfrac{3\sqrt{2}}{2}i}$$

(b) Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an:

$$\left(\frac{\sqrt{3} - i\sqrt{3}}{1+i}\right)^3 = \boxed{3\sqrt{3}i} \qquad \overline{\left(\frac{10}{1-i}\right)} = \boxed{5 - 5i}$$

Aufgabe 7 (*2 Punkte*)

Gegeben sei die komplexe Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{3^n + 1}.$$

Bestimmen Sie den Entwicklungspunkt z_0 sowie den Konvergenzradius ρ:

$$z_0 = \boxed{2} \qquad \rho = \boxed{3}$$

Aufgabe 8 (*2+3+3=8 Punkte*)

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\int_0^1 e^{-2x} + 3 \,\mathrm{d}x$ **(b)** $\int \frac{5x-7}{x^2-2x-3} \,\mathrm{d}x$ **(c)** $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{2+\cos(2x)}} \,\mathrm{d}x$

(a) Standard-Integration:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^{-2x} + 3 \,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^1 + 3x\Big|_0^1 \\
&= -\frac{1}{2} \cdot (e^{-2} - 1) + 3 \\
&= \frac{7}{2} - \frac{e^{-2}}{2}
\end{aligned}$$

(b) Integration via Partialbruchzerlegung, dazu werden die Nullstellen von $x^2 - 2x - 3$ benötigt, diese sind gegeben durch -1 und 3. Daher Ansatz:

$$\frac{5x-7}{(x-3)(x+1)} \overset{!}{=} \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$$
$$\Leftrightarrow 5x - 7 = A(x+1) + B(x-3) = x(A+B) + (A-3B)$$

$$\Rightarrow A + B = 5, A - 3B = -7$$
$$\Rightarrow A = 2, B = 3.$$

Daher gilt:

$$\int \frac{5x-7}{x^2-2x-3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

Ausführen der Integration ergibt:

$$\int \frac{5x-7}{x^2-2x-3}\,\mathrm{d}x = [2\ln|x-3| + 3\ln|x+1|]$$

(c) Integration via Substitution, dazu substituiert man $2+\cos(2x) = u, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -2\sin(2x), u(0) = 3, u(\pi/4) = 2$, womit folgt:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{2+\cos(2x)}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_3^2 \frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$
$$= u^{1/2}\Big|_2^3 = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

Aufgabe 9 (*5 Punkte*)
Gegeben sei die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Determinante $\det \boldsymbol{A}$, den Rang $\operatorname{Rg} \boldsymbol{A}$ und die inverse Matrix $\boldsymbol{A}^{-1}$.

Die Determinante lässt sich beispielsweise mit dem Entwicklungssatz bestimmen, es folgt:

$$\det(\boldsymbol{A}) = 4$$

Da die Determinante ungleich null ist, muss voller Rang vorliegen, d.h. $\operatorname{Rg}\boldsymbol{A} = 3$.
Berechnung der inversen Matrix via Gauß-Algorithmus:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{Z3-Z1}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{Z1-2Z2, Z3+Z2}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{Z3/4}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{array}\right]$$

$$\overset{Z1+4Z3, Z2-2Z3}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{array}\right]$$

Somit folgt

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 10 (*2+1=3 Punkte*)
Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{6x\ln(x)}{x\ln(x)+x-1}$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+n+1}{2n^2-n}$

(a) Anwendung der Regel von l'Hopital ist möglich, es gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{6x\ln(x)}{x\ln(x)+x-1} &\overset{\text{“}0/0\text{“}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{6\ln(x)+6}{\ln(x)+2} \\ &= \frac{6\ln(1)+6}{\ln(1)+2} = \frac{6\cdot 0+6}{0+2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

(b) Durch Ausklammern erhält man:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+n+1}{2n^2-n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(3+1/n+1/n^2)}{n^2(2-1/n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3+1/n+1/n^2}{2-1/n} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Alternativ lässt sich l'Hopital anwenden, dazu muss man zweimal ableiten.

Aufgabe 11 (*2+2=4 Punkte*)

(a) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

$$\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$$

(b) Berechnen Sie den Wert der folgenden Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

(a) Anwendung des Wurzelkriteriums liefert:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(-1)^n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}.$$

Damit konvergiert die Reihe absolut.

Aus der absoluten Konvergenz folgt auch die Konvergenz der Reihe.

(b) Es handelt sich um eine geometrische Reihe, bei welcher der erste Summand fehlt. Daher gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}-1=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-1=2-1=1.$$

Aufgabe 12 (*2+3+2+2=9 Punkte*)

Gegeben sei die Funktion

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad (x,y)\mapsto f(x,y):=(x^2-2y^2)e^{-(x+y)}.$$

(a) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f(x,y)$.

(b) Berechnen Sie die Hesse-Matrix $H_f(x,y)$.

(c) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f.

(d) Klassifizieren Sie die kritischen Stellen von f (Minimum, Maximum, Sattelpunkt).

(a) Durch Ableiten nach x und y erhält man den Gradienten:

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}(2x-x^2+2y^2)\\(-4y-x^2+2y^2)\end{pmatrix}e^{-(x+y)}$$

(b) Indem man den Gradienten weiter ableitet, erhält man die Hesse-Matrix:

$$\begin{pmatrix}x^2-2y^2-4x+2 & x^2-2y^2-2x+4y\\x^2-2y^2-2x+4y & x^2-2y^2+8y-4\end{pmatrix}e^{-(x+y)}$$

(c) Zur Berechnung der kritischen Stellen muss der Gradient nullgesetzt werden und das resultierende Gleichungssystem gelöst werden. Da die e-Funktion nicht null wird, kann sie weggekürzt werden. Man erhält:

$$\begin{pmatrix} 2x - x^2 + 2y^2 \\ -4y - x^2 + 2y^2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Differenz beider Gleichungen ergibt

$$2x + 4y = 0 \Leftrightarrow x = -2y$$

Die lässt sich bspw. in die zweite Gleichung einsetzen, wodurch folgt:

$$\begin{aligned} -4y - 4y^2 + 2y^2 &= -4y - 2y^2 \overset{!}{=} 0 \\ &\Leftrightarrow -2y = y^2 \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die beiden Lösungen $y = 0$ sowie $y = -2$. Eingesetzt in obige Gleichung $2x + 4y = 0$ ergeben sich daraus die beiden kritischen Stellen $P_1 = (0, 0), P_2 = (4, -2)$.

(d) Zur Klassifizierung der kritischen Stellen müssen diese in die Hesse Matrix eingesetzt werden, dadurch erhält man:

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$H_f(4, -2) = \begin{pmatrix} -6 & -8 \\ -8 & -12 \end{pmatrix} \cdot e^{-2}$$

Es muss noch bestimmt werden, ob diese Matrizen positiv definitiv, negativ definit oder indefinit sind. Berechnen der Determinanten liefert:

$$\det H_f(0, 0) = -8, \qquad \det H_f(4, -2) = 8e^{-2} > 0.$$

Damit folgt:

- $P_1 = (0, 0)$ ist ein Sattelpunkt, da die Determinante negativ ist.
- $P_2 = (4, -2)$ ist ein Maximum, da die Determinante positiv und der erste Matrixeintrag (Hauptminor 1. Ordnung) negativ ist.

Aufgabe 13 *(2+2=4 Punkte)*

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die stetige Funktion mit

$$f(x) = \begin{cases} 7x^2 - \frac{5}{4}, & \text{falls } x < \frac{1}{2} \\ 21 \ln(2x) + \frac{1}{2}, & \text{falls } x \geqq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Bestimmen Sie die linksseitige und rechtsseitige Ableitung an der Stelle $x_0 = \frac{1}{2}$, d.h. berechnen Sie:

(a) $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ **(b)** $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Die angegebene Funktion ist stetig, daher gilt $7x^2 - 5/4|_{x=1/2} = 21\ln(2x) + 1/2|_{x=1/2}$

(a) Berechnen der Ableitung und Einsetzen ergibt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7x^2 - 5/4) = 14x$$
$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 1/2 - 0} 14x = 7.$$

(b) Analoges Vorgehen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(21\ln(2x) + 1/2) = \frac{21}{x}$$
$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 1/2 + 0} \frac{21}{x} = 42.$$

Aufgabe 14 (*3 Punkte*)

Beweisen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion über $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

IA $n = 1$:

$$\sum_{i=1}^{1} i^3 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 = 1.$$

IH Wir nehmen an, dass es gilt

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

IS $n \to (n+1)$: Wir berechnen

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2.$$

Aufgabe 15 (*4 Punkte*)

Lösen Sie die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{cases} u'(t) - t^2 u(t) = 0, \quad t > 1 \\ u(1) = e^{-2/3} \end{cases}$$

Sie dürfen dabei annehmen, dass $u(t) > 0$ für alle $t > 1$ gilt.

Wegen $u(1) > 0$ und $u'(t) = t^2 u(t) > 0$ für $t > 1$ ist die Lösung positiv. Daher kann man bei der Trennung der Variablen durch u teilen und die Beträge im Logarithmus weglassen. Dies wurde für die Lösung nicht verlangt, daher wurde die Annahme $u > 0$ hinzugefügt.

Es folgt:

$$\begin{aligned}
& u'(t) = t^2 u(t) \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{u'(t)}{u(t)} = t^2 && \Big| \int \mathrm{d}t \\
\Leftrightarrow \quad & \int \frac{u'(t)}{u(t)} \,\mathrm{d}t = \int t^2 \,\mathrm{d}t \\
\Leftrightarrow \quad & \ln\left(u(t)\right) = \left[\frac{t^3}{3}\right] = \frac{t^3}{2} + c && \Big| \exp() \\
\Leftrightarrow \quad & u(t) = \tilde{c} \cdot e^{\frac{t^3}{3}}
\end{aligned}$$

Die Konstante $\tilde{c}$ lässt sich durch die Anfangsbedingung $u(1) = e^{-2/3}$ bestimmen. Einsetzen von $t = 1$ in $u(t) = \tilde{c} \cdot e^{t^3/3}$ liefert:

$$\tilde{c} \cdot e^{1/3} \overset{!}{=} e^{-2/3} \Leftrightarrow \tilde{c} = e^{-1}$$

Damit ist die Lösung:

$$u(t) = e^{-1} \cdot e^{t^3/3}.$$
